空天科技
Aerospace Science and Technology
第 1 卷◆第 1 期◆版本 1.0◆2025 年
文章类型：论文 | 刊号（ISSN）： /（中图刊号）：

基于时间可达域的多弹动态分组协同制导策略

万成 窦新翔 周佳玲
北京理工大学 前沿交叉科学研究院
DOI:10.12238/ast.v1i1.13704

[摘 要] 针对高价值目标防御体系的突防效能优化问题，该研究提出了一种基于命中时间可达域的动态自适应分组分布式协同饱和打击方案，并根据该方案分别设计出规模自适应分组方案和组内多弹分布式协同制导律。首先，根据导弹初始运动状态和机动性能约束，推导出命中时间可达域。其次，基于命中时间可达域和饱和攻击规模约束，提出一种规模自适应分组方案。最终，采用三维比例导引策略，基于剩余时间估计值一致性误差，提出一种变导航比的三维多弹协同制导律。通过仿真分析，证明该动态分组协同制导方案的可行性和有效性。
[关键词] 命中时间可达域；饱和打击；规模约束；自适应分组；协同制导
中图分类号：TJ765.3 文献标识码：A

Dynamic grouping cooperative guidance strategy fro multi-missile systems based on time reachable domain

Cheng Wan, XinXiang Dou, Jialing Zhou

[Abstract] The paper presents a dynamic adaptive grouping distributed cooperative saturation attack scheme based on impact time reachable domain (ITRD) for high-value target defense systems' penetration effectiveness optimization. It integrates a scale-adaptive grouping architecture and intra-cluster multi-missile distributed cooperative guidance laws. First, the ITRD is analytically derived considering missiles' initial kinematic states and maneuver-ability constraints. Then, a scale-adaptive grouping strategy is developed by integrating ITRD characteristics and saturation attack scale constraints. Finally, a variable navigation ratio three-dimensional cooperative guidance law is proposed using time-to-go estimation consensus error and a three-dimensional proportional navigation strategy. Simulation results confirm the proposed dynamic grouping cooperative guidance framework's feasibility and effectiveness.
[Key words] impact time reachable domain; saturation attack; scale constraint; adaptive grouping; cooperative guidance

1 引言

在当代军事领域，防御技术不断发展并逐渐形成海陆空天一体化格局，其对来袭目标的探测与拦截能力实现了质的飞跃，这直接导致传统单一制导武器的突防作战效能与攻击效果遭受重创，难以满足现代作战需求。在此背景下，多弹协同饱和攻击应运而生，通过多枚导弹从不同方向、不同层次对目标发起密集打击，以此提升突破敌方防御体系的概率并增加毁伤效能。然而，受限于导弹自身的机动性能，弹群往往难以实现所有导弹命中时间的高度同步，或当弹间剩余时间差异过大时，为弥补时间差而过度消耗调节能力，会使导弹个体的突防机动性能大幅下降，进而显著增加其被敌方拦截的概率。为了在有限弹群资源下发挥更大联合作战效能，需要在导弹机动性能约束和时间约束下对弹群进行分组，并在组内对敌方目标进行分布式协同精准饱和打击，这就涉及弹群分组和多弹协同制导两类问题。

现有多弹协同作战自主分组研究主要围绕目标分配和任务协调展开。文献[1]结合常规导弹作战实际和目标分配特点，综合考虑多种约束条件，采用并行蚁群算法建立作战目标分配模型，通过仿真验证了算法的有效性。文献[2]针对防空导弹拦截群体目标的任务需求，提出多弹协同作战任务框架，建立导弹拦截目标的能力预测模型，并运用改进的粒子群优化算法进行目标分配。文献[3]中考虑目标威胁度的模糊性，结合生存概率和武器消耗等因素，建立了一种多阶段的模糊多目标分配规划模型，更好地简化了攻击任务的对抗性和多策略性。然而，针对多弹机动能力容许范围内的同时命中问题，现有研究尚未形成完善的弹群动态自适应分组方法。

从弹群间是否存在信息交互的角度分析协同制导问题，该领域研究主要分为两大方向其一为预先设定命中时刻，即

指定时间命中目标；其二为导弹间借助信息交互，动态协调各自的抵达时间。现有的指定时间命中目标的制导律设计，或基于最优控制理论，或基于李雅普诺夫稳定性理论。前者将问题转化为以终端时间约束为边界条件、以控制能量为性能指标的最优控制问题，根据庞特里亚金极大值原理求解析解[4-5]或者利用算法求数值解[6]。后者则通过构造剩余时间关于可测运动变量的近似表达式，得到估计的终端时间与指定的终端时间的误差项，再利用李雅普诺夫直接法分析使该误差项收敛的条件，进而设计制导律[7-8]。

分布式协同制导旨在通过信息交互实现终端时间一致。文献[9]假定导弹速度大小不变，基于比例导引和剩余时间设计框架，设计变导航比协调剩余时间渐进一致，其设计框架为后续研究提供了重要启发。文献[10]在文献[9]基础上，将全局式控制率推广到分布式，实现剩余时间估计值有限时间收敛。文献[11]选择弹目相对距离为协调变量，解决了机动目标的协同同时命中问题，文献[12]进一步将研究模型拓展至三维空间情形。

本文研究针对多弹动态分组协同制导问题，提出了一种弹群规模自适应分组算法(swarm scale adaptive grouping algorithm)和固定时间收敛的三维分布式协同制导律(three-dimensional distributed cooperative guidance law)。本文主要贡献如下：

1)根据导弹进入末制导阶段的初始状态和自身机动性能约束，建立最大/最小命中时间最优控制问题，并分别制定多阶段制导方案，求解出显式命中时间可达域。

2)基于弹群中各导弹的命中时间可达域和弹群通信网络连接，提出了一种满足最小饱和攻击规模约束的规模自适应分组算法。

3)提出了一种基于分布式拓扑结构的三维协同制导律，使得剩余时间估计值一致性误差在固定时间内收敛。

2 问题描述与基础理论

2.1 问题描述

考虑 n 个导弹 $M_i, i=1,\cdots n$, 在三维空间内从不同方向攻击同一个静止目标，三维几何结构如图 1 所示，其中 M_i 和 T 分别代表导弹 i 和目标，(X_I,Y_I,Z_I)，(X_L,Y_L,Z_L) 分别为惯性坐标系，视线坐标系。r_i 表示导弹 i 与目标之间的相对距离；V_{Mi} 为导弹速度大小；θ_{Li} 和 ψ_{Li} 分别表示视线倾角和视线偏角；θ_{Mi} 和 ψ_{Mi} 分别前置倾角和前置偏角；前置角 σ_{Mi} 是导弹速度矢量和视线方向之间的角度，σ_{Mi} 和 θ_{Mi}、ψ_{Mi} 有着如下的关系：

$$\cos\sigma_{Mi} = \cos\theta_{Mi}\cdot\cos\psi_{Mi} \tag{1}$$

导弹和目标之间的相对运动学模型如下：

$$\dot{r}_i = -V_i\cos\theta_{Mi}\cos\psi_{Mi} \tag{2}$$

$$\dot{\theta}_{Li} = -\frac{V_{Mi}\sin\theta_{Mi}}{r_i} \tag{3}$$

$$\dot{\psi}_{Li} = -\frac{V_i\cos\theta_{Mi}\sin\psi_{Mi}}{r_i\cos\theta_{Li}} \tag{4}$$

$$\dot{\theta}_{Mi} = \frac{a_{zi}}{V_i} - \dot{\theta}_{Li}\cos\psi_{Mi} - \dot{\psi}_{Li}\sin\theta_{Li}\sin\psi_{Mi} \tag{5}$$

$$\dot{\psi}_{Mi} = \frac{a_{yi}}{V_i\cos\theta_{Mi}} - \dot{\theta}_{Li}\sin\psi_{Mi}\tan\theta_{Mi} - \dot{\psi}_{Li}\cos\theta_{Li} + \dot{\psi}_{Li}\sin\theta_{Li}\cos\psi_{Mi}\tan\theta_{Mi} \tag{6}$$

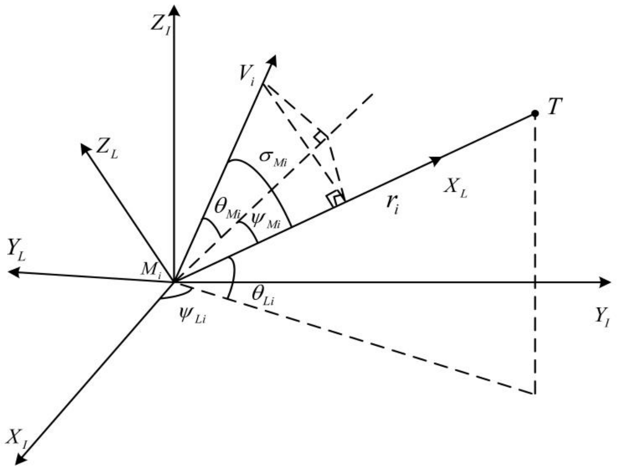

图 1 三维协同制导示意图

Fig.1 3D cooperative guidance geometry

其中 a_{yi} 和 a_{zi} 是加速度在偏航和俯仰方向上的分量。

2.2 基础理论

导弹之间的通信拓扑结构用无向图 $\mathcal{G}=(\mathcal{N},\mathcal{V})$ 描述，其中 $\mathcal{N}=\{M_1,M_2,\cdots,M_n\}$ 表示导弹集合，$\mathcal{V}\in\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ 为通信链路集合。邻接矩阵定义为 $\mathcal{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$，其中 a_{ij} 是非负的，当两个节点间存在通信连接时，$a_{ij}=1$，反之 $a_{ij}=0$。在本文中，不考虑自环，即对于 $\forall i\in\mathcal{N}$，有 $a_{ii}=0$。假设图是强连通的，即任意两枚导弹之间存在至少一条连接路径。

引理 1[13].无向连通图 $\mathcal{G}=(\mathcal{N},\mathcal{V})$ 的拉普拉斯矩阵是半正定的，且零特征值是单根。

引理 2[14].考虑如下的一阶微分方程：

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{7}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$f(x,t):\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是一个连续函数。$V(x)$ 是一个连续可微的正定函数，如果满足下列不等式

$$\dot{V}(x)\le -\alpha V^p(x) - \beta V^q(x) \tag{8}$$

其中 α,β,p,q 是常数，满足 $\alpha,\beta>0, 0<p<1, q>1$, 那么系统将固定时间收敛，且收敛时间 T 满足

$$T \le \frac{1}{\alpha(1-p)} + \frac{1}{\beta(q-1)} \tag{9}$$

3 规模自适应分组方案设计

在现有的分布式协同制导研究框架中，缺乏在导弹机动性能约束下和对弹群进行时空同步保障性条件的分析。为此，本部分基于导弹的机动性能约束和弹群的运动状态，求解命中时间可达域，分析弹群的时空同步能力。其次，基于各导弹命中时间可达域和饱和攻击所需要的最小弹群规模约束进行规模自适应算法设计。

3.1 命中时间可达域求解

对导弹在三维空间中的运动进行分析，导弹的速度矢量和目标之间构成了一个二维平面，若设计导弹的加速度在该平面内，则导弹将始终在该平面内运动直至面中目标，因此，三维的命中时间可达域分析可简化到二维分析。

二维交战平面导弹与目标之间的相对运动学方程可改写为

$$\dot{r}_i = -V_i \cos\sigma_i \tag{10}$$

$$\dot{\sigma}_i = V_i \frac{\sin\sigma_i}{r_i} + \frac{a_i}{V_i} \tag{11}$$

导弹的加速度受到气动设计和结构强度等因素的影响，必须在一定范围内，即 $|a_i| \le a_{\max,i}$；导弹在飞行过程中，需要满足前置角在一定范围内，即 $|\sigma_i| \le \sigma_{\max,i}$ 确保导弹在飞行全程锁定目标。因此，本节所研究的命中时间可达域分析问题是在加速度约束和前置角约束下进行。

将加速度约束 $|a_i| \le a_{\max,i}$ 和前置角约束 $|\sigma_i| \le \sigma_{\max,i}$ 加入并分析其对飞行时间的影响。在最小命中时间问题中，前置角约束是无意义的，σ_i 在全部控制力作用下衰减到零，最后沿直线轨迹飞行直至命中目标，整个过程前置角并未增加。在最大命中时间问题中，导弹的飞行轨迹可以通过在最大控制输入先增加后减小前置角实现，一旦到达约束阈值，最佳策略是施加控制输入使 $|\sigma_i| = \sigma_{\max,i}$，执行该控制策略一直到达一个时刻，在该时刻后的导弹飞行阶段在相反方向施加全部控制力，使得导弹恰好成功命中目标[15]。

基于上述分析，最小命中时间问题可以转换成两阶段控制输入问题，其中两阶段的控制输入可以推导为

$$a_i = \begin{cases} \pm a_{\max,i}, & t < \tilde{t} \\ 0, & t > \tilde{t} \end{cases} \tag{12}$$

其中 $\tilde{t}$ 是前置角衰减为零的时刻，这样的两阶段制导方案将会形成如图 3 所示的最小命中时间飞行路径。其中 (x_M^L, y_M^L) 为导弹初始状态点在 OX_LY_L 平面上的坐标；(x_T^L, y_T^L) 为目标在 OX_LY_L 平面上的坐标；$R_i = V_i^2 / a_{\max,i}$ 为在最大控制力下作匀速圆周运动的半径，α_i 为圆心角。

由图 2 中几何关系可得

$$\tan^{-1}\frac{y_T^L - y_M^L - R_i(\cos(\sigma_{i,0}-\alpha_i) - \cos\sigma_{i,0})}{x_T^L - x_M^L + R_i\left(\sin(\sigma_{i,0}-\alpha_i) - \sin\sigma_{i,0}\right)} + \alpha_i - \sigma_{i,0} = 0 \tag{13}$$

$$r_i(\tilde{t}) = \sqrt{\left(-\frac{V_i^2}{a_{\max,i}}\left(\cos\left(\sigma_{i,0} - \frac{a_{\max,i}}{V_i}\tilde{t}\right) - \cos(\sigma_{i,0})\right)\right)^2 + \left(r_{i,0} + \frac{V_i^2}{a_{\max,i}}\left(\sin\left(\sigma_{i,0} - \frac{a_{\max,i}}{V_i}\tilde{t}\right) - \sin(\sigma_{i,0})\right)\right)^2} \tag{14}$$

其中 $\sigma_{i,0}$ 是初始状态时导弹的前置角，$r_i(\tilde{t})$ 是 $\tilde{t}$ 时刻相对距离，$\tilde{t} = \alpha_i R_i / V_i$ 为圆周运动时长。

在飞行轨迹第二段中，导弹将会沿直线运动命中目标，因此，最小命中时间可以表示为

$$T_{\min,i} = \tilde{t} + \frac{r_i(\tilde{t})}{V_i} \tag{15}$$

最大命中时间问题可以转换成三阶段控制输入问题，其中三阶段的控制输入可以推导为

$$a_i = \begin{cases} \pm a_{\max,i}, & t < \bar{t} \\ -\dfrac{V_i^2 \sin\sigma_i}{r_i}, & \bar{t} < t > \hat{t} \\ \mp a_{\max,i}, & t > \hat{t} \end{cases} \tag{16}$$

其中 $\bar{t}$ 是前置角在全部控制力作用下等于 $\sigma_{\max,i}$ 的时刻，$\hat{t}$ 表示的是在前置角到达限制值后，导弹施加控制力保持前置角到开始施加全部控制力到能成功命中目标的最晚时刻。这样的三阶段制导方案将会形成如图 2 所示的最大命中时间飞行路径。

由图 2 中几何关系可得

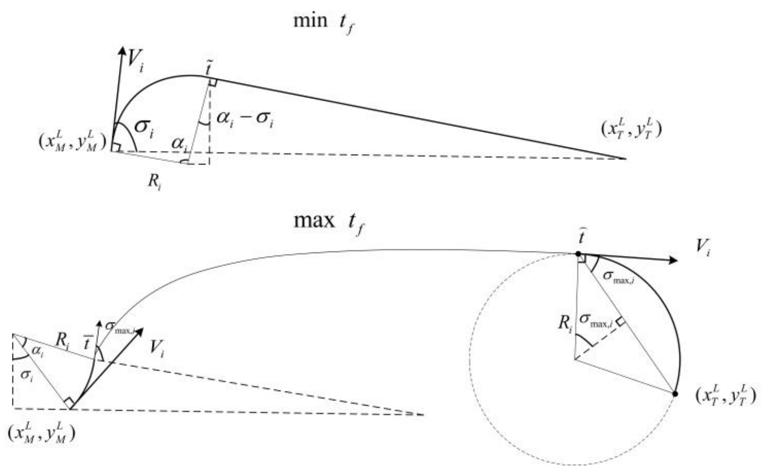

图 2 最小/最大命中时间飞行轨迹

Fig.2 Minimum/maximum impact time flight trajectory

$$\tan^{-1}\frac{y_T^L - y_M^L + R_i(\cos(\sigma_{i,0}+\alpha_i)-\cos\sigma_{i,0})}{x_T^L - x_M^L - R_i\left(\sin(\sigma_{i,0}+\alpha_i)-\sin\sigma_{i,0}\right)} + \alpha_{\max,i} - \alpha_i - \sigma_{i,0} = 0 \tag{17}$$

$$r_i(\bar{t}) = \sqrt{\left(\frac{V_i^2}{a_{\max,i}}\left(\cos\left(\sigma_{i,0}+\frac{a_{\max,i}}{V_i}\bar{t}\right)-\cos(\sigma_{i,0})\right)\right)^2 + \left(r_{i,0}-\frac{V_i^2}{a_{\max,i}}\left(\sin\left(\sigma_{i,0}+\frac{a_{\max,i}}{V_i}\bar{t}\right)-\sin(\sigma_{i,0})\right)\right)^2} \tag{18}$$

其中 $r_i\left(\bar{t}\right)$ 是 $\bar{t}$ 时刻相对距离，$\bar{t} = \alpha_i R_i / V_i$ 为第一阶段圆周运动时长。

由式(11)可知，在飞行的第二阶段，给导弹施加加速度控制 $a_i = -V_i^2 \sin\sigma_i / r_i$，能一直保持 $|\sigma_i| = \sigma_{\max,i}$，结合式(10)可得

$$r_i(\hat{t}) = r_i(\bar{t}) - V_i \cos\sigma_{\max,i}\left(\hat{t} - \bar{t}\right) \tag{19}$$

结合式(26)和式(27)可得最大命中时间为

$$T_{\max,i} = \bar{t} + \frac{r_i(\bar{t})}{V_i \cos\sigma_{\max,i}} + \frac{2(\sigma_{\max,i} - \tan\sigma_{\max,i})}{a_{\max,i}} \tag{20}$$

其中 $\bar{t}$ 由计算机求解。以上分析得到了最小命中时间和最大命中时间，由此得到导弹的命中时间可达域 $\hat{\mathbb{R}}_i = [T_{\min,i}, T_{\max,i}]$。本节介绍的分析方法并未预设特定的导引律。因此，这种方法在分析过程中更加全面地考虑了导弹性能约束，为导弹命中时间预测提供了一种有效的分析方法。

3.2 规模自适应算法设计

在上一小节基础上，针对弹群受机动性能约束、初始调节难以实现同时命中目标，致使饱和攻击效能受限的问题，提出弹群规模自适应协调算法，通过动态分组策略有效实现了对目标的高效饱和攻击。算法流程如下：

（1）局部可达域信息交互

针对弹群系统 $\mathbb{N} = \{M_1, \cdots, M_i\}$ 中的每枚导弹 M_i，基于初始运动状态和机动性能约束，独立估计自身命中时间可达域 $\hat{\mathbb{R}}_i = [T_{\min,i}, T_{\max,i}]$。随后，导弹通过广播机制向所有邻居节点发送包含自身编号和可达域的信息 $\bar{\pi}_i = \{i, \hat{\mathbb{R}}_i\}$，并接收来自所有内邻居的信息 $\bar{\pi}_j, \forall j \in Q_i$，$Q_i$ 为内邻居集合。经过 $n-1$ 轮信息交互，每枚导弹将自身的可达域集合更新为自身与所有邻居信息的并集，最终所有导弹均获得包含全局可达域信息的集合 $\bar{\pi} = \{\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2, \cdots, \bar{\pi}_n\}$，确保了每枚导弹均可掌握整个弹群的命中时间可达域估计分布。

（2）导弹排序与分组初始化

基于全局可达域信息，按可达域上限 $T_{\max,i}$ 对所有导弹升序排序，重新编号为 1 至 n，使编号越靠后的导弹命中时间上限越大。定义第 s 组群 $\mathbb{N}_s$ 的最后一枚导弹编号为 k_s，初始时设置第一组的候选范围为最后 P 枚导弹，形成初始候选组 $\mathbb{N}_1 = \{M_n, M_{n-1}, \cdots, M_{k_1}\}$，其中，$k_1 = n - P + 1$。计算该候选组内所有导弹可达域下限的最大值 $\delta_s = \max\{T_{\min,i} \mid i \in \mathbb{N}_s\}$，作为该组时空同步区域的下限估计，计算组内导弹可达域上限的最小值 $T_{\max}^s = \min\{T_{\max,i} \mid i \in \mathbb{N}_s\}$，为该组时空同步区域的上限。

（3）自适应分组与同步区域验证

从后向前逐组划分，确保每组弹群 $\mathbb{N}_s = \{M_{k_{s-1}-1}, M_{k_{s-1}-2}, \cdots, M_{k_s}\}, s \neq 1$ 至少包含 P 枚导弹。对于当前候选组，若组内可达域下限最大值 $\delta_s \geq T_{\max}^s$，即时空同步区域不存在，则将该组的第一枚导弹移至前一组，尾端加入后一组中编号前一位的导弹，重新计算 δ_s 和 $T_{\max}^s$，直至满足判断条件 $\delta_s < T_{\max}^s$。重复此过程，依次确定每组所含

导弹编号的范围，直至所有组划分完成，若剩余导弹数小于 P，则暂时将其作为独立组，形成时空同步区域有效的初始组群集合。

（4）反向调节与分组验证

从前往后对上述时空同步区域有效的初始组群进行反向调节，即 $\delta_s=\max\{T_{\min,i}\mid i\in\mathbb{N}_s\}$， $k_s=1$，对于当前候选组，若组内可达域下限最大值 $\delta_s\geq T_{\max}^s$，即时空同步区域不存在，则将该组的第一枚导弹移至上一组，重新计算 δ_s 和 $T_{\max}^s$，直至满足 $\delta_s<T_{\max}^s$，重复此过程，依次确定前一组的范围，直至所有组划分完成，形成满足饱和攻击规模且时空同步区域有效的组群集合。

具体描述见算法一。

算法 1: 弹群规模自适应协调算法

1：导弹估计自身命中时间可达域 $\hat{\mathbb{R}}_i=[T_{\min,i},T_{\max,i}]$

2：初始化 $q=1,\bar{\pi}_i=\{i,\hat{\mathbb{R}}_i\}$，输入最小饱和攻击导弹数 P

3：导弹 M_i 发送 $\bar{\pi}_i$ 至所有外邻居，并接受内邻居信息 $\bar{\pi}_j,\forall j\in N_i$

4：导弹 M_i 更新 $\bar{\pi}_i=\bigcup\limits_{j\in N_i\cup\{i\}}\bar{\pi}_j$， $q=q+1$

5：若 $q<n$，则返回步骤 3

6：导弹 M_i 获取所有导弹的命中时间可达域信息估计 $\bar{\pi}=\{\bar{\pi}_1,\bar{\pi}_2,\cdots,\bar{\pi}_n\}$

7：导弹 M_i 按可达域上限 $T_{\max,i}$ 对所有导弹进行升序排序，并重新标号为 1 到 n

8：初始化 $k_1=n-P+1,\delta_1=\max\{T_{\min,i}\mid i=n,\cdots,k_1\},s=1$

9：若 $k_s>P$，则 $s=s+1$， $k_s=k_{s-1}-P$，否则 $k_s=1,h=s$，跳转步骤 12，进行反向调节

10：计算候选组内所有导弹可达域下限的最大值 $\delta_s=\max\{T_{\min,i}\mid i=k_{s-1}-1,\cdots,k_s\}$

11：若 $\delta_s\geq T_{\max}^s$，则 $k_{s-1}=k_{s-1}-1,k_s=k_s-1$，返回步骤 10；否则返回步骤 9

12：计算候选组内所有导弹可达域下限的最大值 $\delta_s=\max\{T_{\min,i}\mid i=k_{s-1}-1,\cdots,k_s\}$

13：若 $\delta_s\geq T_{\max}^s$，则 $k_{s-1}=k_{s-1}-1$，返回步骤 12；否则 $\mathbb{N}_s=\{M_{k_{s-1}-1},M_{k_{s-1}-2},\cdots,M_{k_s}\}$，执行步骤 14

14：若 $s>1$ 则 $s=s-1$，返回步骤 12；否则 $\mathbb{N}_1=\{M_n,M_{n-1},\cdots,M_{k_1}\}$，完成分组，执行步骤 15

15：输出所有组群 $\{\mathbb{N}_1,\mathbb{N}_2,\cdots,\mathbb{N}_s\}$

该算法借助邻间局部交互实现全局信息共享，融合命中时间可达域正向分组与动态反向调节策略，在满足饱和攻击规模约束的同时保障组内时空同步区域有效，为多弹协同饱和攻击构建了兼具自主性、灵活性与高效性的稳健分组方案，有效平衡复杂战场环境下信息交互、规模约束及时空同步的多重需求，为实际作战提供了理论与实践并重的解决方案。

4 分布式协同制导律设计

本节所设计的分布式协同制导律基于如下的三维比例导引策略

$$
\begin{cases}
a_y=-\dfrac{N_iV_i^2\sin\psi_{Mi}}{r_i}\\
a_z=-\dfrac{N_iV_i^2\sin\theta_{Mi}\cos\psi_{Mi}}{r_i}
\end{cases}
\tag{21}
$$

其中 N_i 为导弹 i 的导航比，结合式(3)-(6)对式(1)以自变量 t 求导得

$$
\begin{aligned}
\dot{\sigma}_i&=\frac{\sin\theta_{Mi}\cos\psi_{Mi}}{\sin\sigma_i}\cdot\dot{\theta}_{Mi}+\frac{\cos\theta_{Mi}\sin\psi_{Mi}}{\sin\sigma_i}\cdot\dot{\psi}_{Mi}\\
&=\frac{V_i\left(\sin^2\theta_{Mi}+\cos^2\theta_{Mi}\sin^2\psi_{Mi}\right)}{r_i\sin\sigma_i}+\frac{\sin\psi_{Mi}}{V_i\sin\sigma_i}a_{yi}+\frac{\sin\theta_{Mi}\cos\psi_{Mi}}{V_i\sin\sigma_i}\cdot a_{zi}\\
&=\frac{V_i\sin\sigma_i}{r_i}+\frac{\sin\psi_{Mi}}{V_i\sin\sigma_i}\cdot a_{yi}+\frac{\sin\theta_{Mi}\cos\psi_{Mi}}{V_i\sin\sigma_i}\cdot a_{zi}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

将式(21)代入式(22)中得到

$$\dot{\sigma}_i = \frac{V_i \sin\sigma_i}{r_i} - N_i \frac{\sin^2\psi_{Mi} + \sin^2\theta_{Mi}\cos^2\psi_{Mi}}{V_i \sin\sigma_i} = -\frac{(N_i - 1)V_i \sin\sigma_i}{r_i} \tag{23}$$

设计协同制导律的协同导航比为

$$N_i = N_b(1 - c_{1i}\mathrm{sig}^\tau(\xi_i) - c_{2i}\mathrm{sig}^\gamma(\xi_i)) \tag{24}$$

其中 $N_b, c_{1i}, c_{2i}, \tau, \gamma$ 为满足 $N_b > 2, c_{1i} > 0, c_{2i} > 0, 0 < \tau < 1, \gamma > 1$ 的常数，函数 $\mathrm{sig}^\tau(\xi_i) = |\xi_i|^\tau \mathrm{sign}(\xi_i)$， $\mathrm{sign}(\cdot)$ 为符号函数，ξ_i 为剩余时间估计值一致性误差

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\hat{t}_{go,j} - \hat{t}_{go,i}) \tag{25}$$

三维比例导引下的剩余时间估计值为

$$\hat{t}_{go,i} = \frac{r_i}{V_i}\left(1 + \frac{\sigma_i^2}{2(2N_b - 1)}\right) \tag{26}$$

定理 1.对于系统(2-6)，导弹之间的通信拓扑是无向连通的，且导弹与目标之间的总前置角较小，所设计的协同制导律(21)(24)能使多导弹固定时间内同时命中目标。

证明：对式(26)以自变量 t 求导得

$$\dot{\hat{t}}_{go,i} = \frac{\dot{r}_i}{V_i}\left(1 + \frac{\sigma_i^2}{2(2N_b - 1)}\right) + \frac{r_i\sigma_i\dot{\sigma}_i}{V_i(2N_b - 1)} \tag{27}$$

将式(1-2)和式(23)代入式(27)中得

$$\begin{aligned}\dot{\hat{t}}_{go,i} &= -\cos\sigma_i\left(1 + \frac{\sigma_i^2}{2(2N_b - 1)}\right) - \frac{(N_i - 1)\sigma_i \sin\sigma_i}{2N_b - 1} \\ &\approx -1 + \frac{\sigma_i^2}{2} - \frac{\sigma_i^2}{2(2N_b - 1)} - \frac{(N_i - 1)\sigma_i^2}{2N_b - 1} \\ &= -1 + \frac{(N_b - N_i)\sigma_i^2}{2N_b - 1}\end{aligned} \tag{28}$$

将式(24)代入式(28)中得

$$\dot{\hat{t}}_{go,i} = -1 + \frac{N_b\sigma_i^2 \mathrm{sign}(\xi_i)(c_{1i}r_i|\xi_i|^\tau + c_{2i}r_i|\xi_i|^\gamma)}{2N_b - 1} \tag{29}$$

考虑如下的李雅普诺夫函数

$$W = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\hat{t}_{go,j} - \hat{t}_{go,i})^2 = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{t}}_{go}^T \mathbf{L}\hat{\mathbf{t}}_{go} \tag{30}$$

其中 $\hat{\mathbf{t}}_{go} = [\hat{t}_{go,i}, \cdots, \hat{t}_{go,n}]^T$，$\mathbf{L}$ 为拉普拉斯矩阵。对式(30)以自变量 t 求导得

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \frac{1}{2}\hat{\mathbf{t}}_{go}^T \mathbf{L}\dot{\hat{\mathbf{t}}}_{go} \\ &= -\frac{N_b}{2N_b - 1}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{1i}r_i\sigma_i^2|\xi_i|^{1+\tau} + \sum_{i=1}^{n} c_{2i}r_i\sigma_i^2|\xi_i|^{1+\gamma}\right)\end{aligned} \tag{31}$$

假设在剩余时间估计值一致性误差收敛之前，存在正常数 $r_i \ge r_m, |\sigma_i| \ge \sigma_m$，定义如下参数

$$\begin{cases} c_{1m} = \dfrac{N_b r_m \sigma_m}{2N_b - 1}\min\{c_{11}, \cdots, c_{1n}\} \\ c_{2m} = \dfrac{N_b r_m \sigma_m}{2N_b - 1}\min\{c_{21}, \cdots, c_{2n}\} \end{cases} \tag{32}$$

由引理 1 可得，$\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi} \ge 2\lambda_2 V$，其中 λ_2 为拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}$ 的最小非零特征值， $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \cdots, \xi_n]^T$，将式(32)代入式(31)中得

$$\dot{W} \le -(2\lambda_2)^{\frac{1+\tau}{2}} c_{1m} W^{\frac{1+\tau}{2}} - (2\lambda_2)^{\frac{1+\gamma}{2}} c_{2m} W^{\frac{1+\gamma}{2}} \tag{33}$$

根据引理 2，由式(33)可得，W 将在固定时间内收敛到零，即剩余时间估计值一致性误差将在固定时间内一致性收敛到零。收敛时间 T 满足不等式

$$T \le \frac{2}{(2\lambda_2)^{1+\tau/2} c_{1m}(1-\tau)} + \frac{2}{(2\lambda_2)^{1+\gamma/2} c_{2m}(\gamma - 1)} \tag{34}$$

5 仿真验证

本节设计六个导弹攻击一个静止目标的场景进行仿真，以验证本文弹群规模自适应分组算法和三维分布式协同制导律的可行性和有效性。在仿真中，目标坐标为 $(0,0,0)\mathrm{km}$，各导弹加速度分量的绝对值阈值为 $40\mathrm{m/s^2}$，总前置角的绝对值阈值为 $60\deg$，仿真步长最大值为 $0.01\mathrm{s}$，当每个导弹与目标的相对距离小于 $1\mathrm{m}$ 时停止仿真。

六个导弹的初始状态如表 1 所示，弹群之间的通信拓扑是完全连通的。

表 1 导弹初始状态

Table 1 initial state of missiles

参数名称	参数初始值					
	导弹 1	导弹 2	导弹 3	导弹 4	导弹 5	导弹 6
相对距离(km)	(10，0，4)	(7.4，7.5，5.4)	(6.7，-6.5，4.2)	(2，9，5)	(12，6，4.6)	(4.5，-9.2，4.5)
速率(m/s)	350	300	330	300	320	310
视线倾角(deg)	21.80	27.14	24.22	28.47	18.93	23.72
视线偏角(deg)	0	45.38	-44.13	77.47	26.57	-63.94

前置倾角(deg)	47	30	35	42	42	34
前置偏角(deg)	10	-5	12	0	-6	6

5.1 规模自适应算法有效性验证

设定弹群对目标进行饱和攻击的最小规模为 3，利用本文所设计的规模自适应分组方案在上述导弹初始状态和加速度约束、前置角约束下进行仿真验证，各导弹的最小命中时间、最大命中时间和分组完毕后所属的组群信息如表 2 所示。

表 2 规模自适应分组信息

Table 2 scale adaptive grouping information

序号	导弹 1	导弹 2	导弹 3	导弹 4	导弹 5	导弹 6
最小命中时间(s)	31.22	30.04	31.11	35.50	45.17	36.25
最大命中时间(s)	49.49	44.92	49.41	60.43	79.28	61.21
所属组群	1	1	1	2	2	2

从表 2 中可以看出，所设计的命中时间可达域算法可以在导弹不同初始状态下求解出精准的最小命中时间和最大命中时间。值得注意的是，导弹 5 的最小命中时间是 45.17s，大于导弹 2 的最大命中时间，两个导弹的命中时间可达域无交集，不能实现协同制导，规模自适应分组算法将其分到不同组群，且都满足最小饱和攻击规模，充分验证了规模自适应算法的有效性。

5.2 协同制导律仿真验证

在本小节中，针对组群内多弹饱和攻击目标的对战场景，采用式(29)和式(32)的协同制导律，各导弹的初始状态如表 1 所示，组群 1 和组群 2 的通信拓扑结构如图 4 所示，协同制导律的导航比取 $N_b = 3$，组群 1 的其他控制参数取

$c_{11} = c_{12} = c_{13} = 0.8,\ c_{21} = c_{22} = c_{23} = 1.1,\ \tau = 0.8,\ \gamma = 1.2$，

组群 2 的其他控制参数取

$c_{14} = c_{15} = c_{16} = 0.7,\ c_{24} = c_{25} = c_{26} = 1.2,\ \tau = 0.7,\ \gamma = 1.2$。

仿真结果如图 5—图 9 所示。

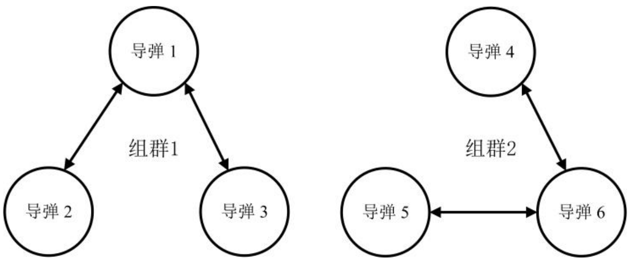

图 3 组群通信拓扑关系

Fig.3 Communication topological relationship of group

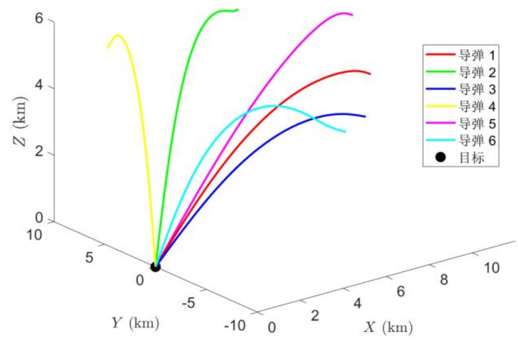

图 4 三维飞行轨迹

Fig.4 3D flight trajectories

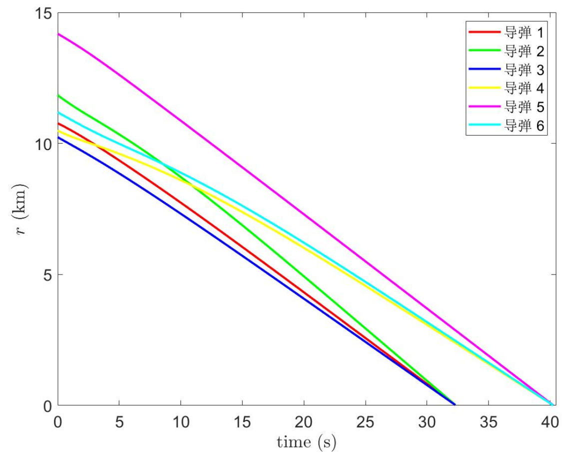

图 5 相对距离

Fig.5 Relative distance

第 1 卷◆第 1 期◆版本 1.0◆2025 年
文章类型：论文 | 刊号（ISSN）：/（中图刊号）：

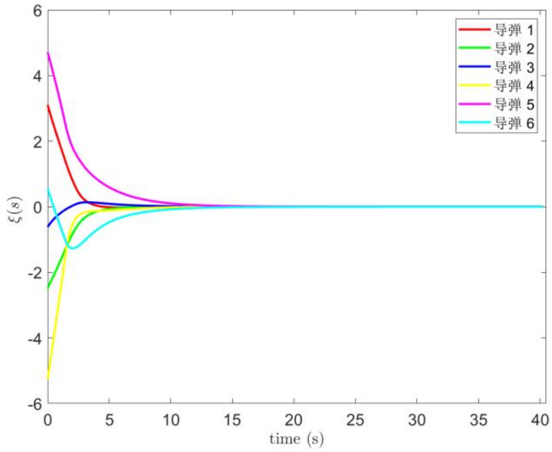

图 6 剩余时间估计值一致性误差

Fig.6 Consistency error variation of time-to-go estimate

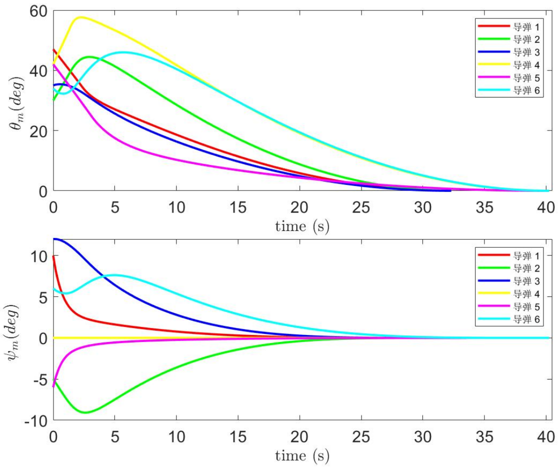

图 7 前置倾角前置偏角

Fig.7 lead angles in pitch and yaw planes

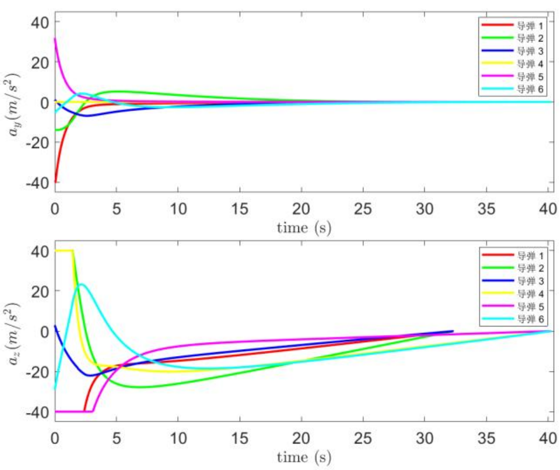

图 8 法向加速度分量

Fig.8 lateral accelerations

由图 5 和图 6 的数值仿真结果可以看出，组群 1 和组群 2 在三维协同制导律的引导下协同命中目标；图 7 表明各导弹的命中时间估计值一致性误差实现了一致性收敛到零，仿真结束时的剩余时间估计值分别为 0.0006s，0.0004s，0.0033s，0.0031s，0.0062s，0.0002s，各导弹的命中时间误差均小于 0.01s，充分验证了制导律的有效性；图 8 表明在实现协同制导任务时，剩余时间较小的导弹前置角先增加后减小，使得飞行轨迹更加弯曲，总前置角大小都保持在 60deg 以内；图 9 表明在剩余时间估计值一致性误差较大时需要较大的控制力，此时加速度达到阈值 40m/s^2，最终加速度分量均收敛到零。

6 结语

本文提出了一种基于命中时间可达域的动态自适应分组分布式协同饱和打击方案，旨在优化高价值目标防御体系的突防效能。通过分析导弹的初始运动状态和机动性能约束，推导出命中时间可达域，为导弹分组和协同制导提供了理论基础。基于此，设计了一种规模自适应分组方案，能够根据饱和攻击规模约束动态调整导弹分组，确保每组导弹在指定时间内协同作战。同时，提出了一种变导航比的三维多弹协同制导律，利用剩余时间估计值一致性误差进行实时调整，提高了导弹群的协同打击效能。仿真结果表明，该方案能够有效提升导弹群的突防能力和攻击效果，具有较高的可行性和实用性。

[参考文献]

[1] 杨颖，魏鹏，蒋鸣，等. 基于并行蚁群算法的常规导弹作战任务分配[J]. 弹箭与制导学报, 2014, 34(5): 189-92.

[2] 何飞毅，沈洁，陈光山，等. 防空导弹任务规划与协同控制技术研究[J]. 导航定位与授时, 2020, 7(5): 120-7.

[3] Zhao Y, Song Y, Zhang J, et al. Fuzzy game decision-making of unmanned aerial vehicles air-to-ground attack based on the particle swarm optimization integrating multiply strategies[J]. Control Theory Appl, 2019, 36(10): 1644-52.

[4] Lee J-I, Jeon I-S, Tahk M-J. Guidance law to control impact time and angle[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(1): 301-10.

[5] Jeon I-S, Lee J-I, Tahk M-J. Impact-time-control guidance with generalized proportional navigation based on nonlinear formulation[J]. Journal of Guidance,Control,and Dynamics, 2016, 39(8): 1885-90.

[6] Harl N, Balakrishnan S. Impact time and angle guidance with sliding mode control[J]. IEEE Transactions on control systems technology, 2011, 20(6): 1436-49.

[7] Cho D, Kim H J, Tahk M-J. Nonsingular sliding mode guidance for impact time control[J]. Journal of Guidance,Control,and Dynamics, 2016, 39(1): 61-8.

[8] Zhou J, Yang J. Guidance law design for impact time attack against moving targets[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(5): 2580-9.

[9] Jeon I-S, Lee J-I, Tahk M-J. Homing guidance law for cooperative attack of multiple missiles[J]. Journal of guidance,control,and dynamics, 2010, 33(1): 275-80.

[10] Zhou J, Yang J, Li Z. Simultaneous attack of a stationary target using multiple missiles: a consensus-based approach[J]. Science China Information Sciences, 2017, 60: 1-14.

[11] Zhou J, Lü Y, Li Z, et al. Cooperative guidance law design for simultaneous attack with multiple missiles against a maneuvering target[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2018, 31: 287-301.

[12] Zhou J, Lv Y, Wen G, et al. Three-dimensional cooperative guidance law design for simultaneous attack with multiple missiles against a maneuvering target; proceedings of the 2018 IEEE CSAA Guidance,Navigation and Control Conference (CGNCC), F, 2018[C]. IEEE.

[13] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 950-955.

[14] Polyakov A, Fridman L. Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(4): 1831-1865.

[15] Erer K S, Tekin R. Impact time and angle control based on constrained optimal solutions[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(10): 2448-2454.

作者简介：

万成，男，汉族，2001 年 10 月 8 日生，湖北籍，现于北京理工大学攻读硕士学位，主要研究方向为协同制导与控制，多智能体协同控制

窦新翔，男，汉族，2000 年 12 月 13 日生，天津籍，现于北京理工大学攻读博士学位，主要研究方向为多智能体协同控制，强化学习。

周佳玲，女，汉族，1991 年 12 月 15 日生，湖北籍，北京理工大学前沿交叉科学学院教授，主要研究方向为协同制导与控制，群智协同控制与优化，集群博弈，本文通信作者。

基金项目：

国家自然科学基金(62376029，U24A20279，62088101)