

《信号与系统》教学中的几个数学难点的讲解

程鉴南

重庆移通学院 通信与信息工程学院 400000

DOI:10.12238/ems.v7i7.14260

[摘要] 《信号与系统》是研究信号的产生、传输、处理和控制方面的学科,最大的特点就由数学语言描述,涉及到复杂的数学描述和变换,数学计算和推导多。本文根据自己在实际教学中遇到问题,通过对教学中几个关键数学难点的详细解析,讲述了在实际教学中如何针对学生的能力,加强数学推导训练,强调概念之间联系,并赋予物理内意义及通信内涵的问题,并及时课堂做习题巩固所学知识,提高学生的理解能力和学习效果。

[关键词] 信号与系统;复指数信号;欧拉公式;卷积;傅里叶变换

《信号与系统》课程是通信工程、电子信息工程、自动化、计算机等专业的一门重要的专业基础课程,主要研究的是信号产生、传输、处理和控制等基本理论和基本分析方法方面的内容,《信号与系统》作为专业基础课安排在大三学期的上学期。由于信号与系统的理论方法在广泛的工程技术领域具有指导意义,因此,机械、动力与力学等其他非电类专业也在不同深度上开设了这门课程。这门课程也是电子信息类研究生入学考试的必考课程之一。

本课程最大的特点就是用数学的手段研究处理信号和系统。

从时间跨度上看数学的讲授贯穿了整个课程的始终:信号和系统描述是数学,计算是数学,变换是数学,分析还是数学;从空间覆盖上看:广泛涉及高等数学、线性代数、概率论、复变函数等数学分支。

需要理解各种公式、符号和概念;需要分析和推理各种数学问题;需要进行大量的计算;需要掌握大量的数学工具和变换。

一方面从某种程度上讲《信号与系统》这门课程就是数学课,离开了数学推演真说不清楚这门课的来龙去脉了。另一方面《信号与系统》这门课程又是专业基础,有它自己的目的、内容和方法。不可能象数学课那样满黑板地推导。因此,在《信号与系统》的教学中,教什么,怎么教,教到什么程度非常重要。本文作者根据自己在实际教学中的感受,结合几个关键数学难点的教学为例,谈谈自己的一些体会。

1. 复指数信号

典型信号的复指数信号的教学时,一开始学生就很抱怨,为什么要用复数呀?这是由于学生缺少许多相关知识,这些逻辑上的中间步骤需要我们去完成解析。

复指数信号当指数信号的指数因子是复数时,称之为复指数信号,其数学表达式为:

$$f(t) = Ae^{\alpha + j\omega t}$$

α 为复数的实部, $j\omega t$ 是其虚部。 A 是信号的幅度,其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

①虚数是怎样的一个数呀?其实虚数这概念高中时就遇到了,但在学习《信号与系统》时,大部分同学依然对虚数的概念困惑,是不是数?是一个怎样的数?一定安慰学生一定不要自责,因为这个问题也困扰了许多优秀数学家很多年。从实数到复数再到复平面,要在信号范畴内去理解复数,其实 i 既不是正数,也不是负数,也不是零也不是实数, $i^2 = -1$ 。有了虚数,实数的概念就扩大到了复数。虚数单位在数学领域里用 i 表示和而在工程领域则用 j 表示。

②为什么要用复指数函数描述信号呀?一是因为指数信号也是系统的特征向量,表示能量的积聚或衰减。如原子弹的爆炸和放射物质衰减或者扩散大多是指指数形式进行的,如果既有波动又有指数衰减(),因此具有特征的基函数成了既有三角函数又有指数函数的复合函数形式了。二是以 e 为底的指数函数的导数,级数以及其他相关运算都具有简洁形式,这也是其具有重要性的根本原因。

③尽管复指数信号在物理上是不可实现的,但是它概括

了多种情况。利用复指数信号可以表示常见的普通信号,如直流信号、指数信号、正弦信号等。复指数信号的微分和积分仍然是复指数信号,利用复指数信号可以使许多运算和分析简化。因此,复指数信号是信号分析中非常重要的基本信号。

④复指数函数形式的傅里叶级数其形式更加简洁优美,这就是我们采用复指数形式的原因。

信号的学习涉及频域时域二者的转换,不可避免的会出现复数运算。而实数是复数的一个子集,凡事能用实数的地方,都可以用复数,但某些场合使用复数会使运算更加简洁,理解运算结果更加直观,这一点在《信号与系统》课程中尤为突出。

2. 欧拉公式

《信号与系统》中,欧拉公式贯穿整个课程的始终,但没有把欧拉公式单独提出来讲解。

如果 x 为实数,则有著名的欧拉公式:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

这个欧拉公式是指以欧拉命名的诸多公式之一,称之为最酷的公式之一!——复变函数中的欧拉幅角公式,架起通过复数连接指数函数和三角函数的桥梁!

对于复指数信号 $f(t) = Ae^{\alpha + j\omega t}$,借助欧拉公式展开可得:

$$f(t) = Ae^{\alpha} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

其实部 $a(t) = Ae^{\alpha} \cos(\omega t)$,虚部 $b(t) = Ae^{\alpha} \sin(\omega t)$

欧拉公式将三角函数的定义扩大到了复数,建立了三角函数和指数函数的关系,复指数信号实部为余弦,虚部为正弦,可以理解为以角速度 ω 逆时针运动,复指数信号: $e^{j\omega t}$,根据欧拉公式 $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$ 。如果把这个函数作为控制系统的输入函数,那么一想便知系统的输出也应当是一个复数:根据复数相等实部实部相等、虚部虚部相等的原则,那么输出的实部与输入的实部: $\cos(\omega t)$ 相对应;输出的虚部与输入的虚部: $\sin(\omega t)$ 相对应。这有输入一个复指数函数就同时解决了系统输出的振幅和相位的问题。

欧拉公式所描绘的,是一个随着时间变化,在复平面上做圆周运动的点,随着时间的改变,在时间轴上就成了一条螺旋线。如果只看它的实数部分,也就是螺旋线在左侧的投

影,就是一个最基础的余弦函数。而右侧的投影则是一个正弦函数。因为三角函数可以看作圆周运动的一种投影,所以,在复数域,三角函数和乘法运算(指数)被统一了。

3. 卷积:

卷积运算是时域中信号处理的重要工具。

先看关于卷积的定义:在数学上,两个实数函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积定义为:

$$f(t) * g(t) = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

其中 t 是变量, τ 是积分变量。这个用在连续函数上的公式称为卷积积分:

$$s(n) = (f * g)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) g(n - m)$$

N 为信号 $f(n)$ 的长度,而用在离散函数上称为卷积和。

大部分学生看到卷积的这定义,立马晕菜,头都大了,讲的是啥呀?

其实它只是告诉你了卷积是怎么算的,但根本没告诉你卷积这个概念讲的是什么。

有时教师在遇到一个问题需要解决的时候,我们心态特别着急,直接一步跳跃到我们想要解决的问题上,适得其反。其实换一个次序去讲相对就容易了。

先从字面上理解卷积,“卷”是什么意思?“积”又是什么意思?

图解法求信号卷积:先对 g 函数进行翻转,相当于在数轴上把 g 函数从右边褶到左边去,也就是卷积的“卷”的由来。然后再把 g 函数平移到 n ,在这个位置对两个函数的对应点相乘,然后积分/加权求和,这个过程是卷积的“积”的过程。

列表法求离散信号卷积:将 $f(n)$ 的值顺序排成一行, $g(n)$ 的值顺序排成一列,行列交叉处为 $f(n)$ 和 $g(n)$ 的乘积,各对角斜线上的值就是卷积 $s(n)$ 的值。

学生慢慢对卷积有点概念了,卷积是一种积分运算,用来求两个曲线重叠区域面积。可以看作加权求和也就是说,所得到的结果反映了两个卷积函数的重叠部分。这样从计算

的方式上对公式进行了解释,从数学上讲无可挑剔。

那么卷积背后的意义是什么呢?一个公式如果给不出结合实际的直观的通俗的解释,就觉得少了点什么,觉得不是真的懂了。

卷积是一种数学运算,用于将两个函数或信号合并成一个新的函数或信号,表示其中一个函数如何修改另一个函数。换一个说法就是一个函数(如单位响应)在另一个函数(如输入信号)上的加权叠加。卷积的意义在于计算两个信号之间的响应关系,即输入信号通过系统后产生的输出信号。

卷积描述了系统输入信号、冲激响应和系统响应间的关系:即输出可以通过输入和一个表征系统特性的函数(冲激响应函数)进行卷积运算得到。

卷积可以用于描述输入信号通过系统后产生的输出信号:一个输入信号 $f(t)$, 经过一个线性系统(其特征可以用单位冲击响应函数 $g(t)$ 描述)以后,输出信号应该是什么?实际上通过卷积运算就可以得到输出信号。

卷积和不仅是信号系统的核心概念之一,也是后续学习数字信号处理等高级课程的基础,学生应熟练掌握卷积和的性质,和数学推导,理论分析,并在不同的题型中灵活运用这些性质。

4. 傅里叶变换

傅里叶变换是工程领域最著名的变换,没有之一。

傅里叶变换能够将一个函数或信号表示为一系列正弦和余弦函数的和,从而提取出不同频率的成分。而这个变换的两种主要形式是三角函数性和指数形式的傅里叶变换。

4.1 三角函数性的傅里叶变换

三角函数性的傅里叶变换:也称为傅里叶级数展开,是将一个周期函数展开成一系列正弦和余弦函数的和。它的公式表示如下:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

该形式中的三角函数包括正弦函数,其中 $\sin(n\omega t)$, n 为整数, ω 是角频率

傅里叶变换三角形式的核心在于把复杂周期函数展开成简单三角函数叠加:也就是说,任何连续周期信号都可以由

一组适当的正弦曲线组合而成。虽然正弦曲线无法组合成一个带有棱角的信号。但是,我们可以用正弦曲线来非常逼近地表示它,任何波形都是可以如此方法用正弦波叠加起来的。

分解信号的方法是无穷多的,为什么我们要用正弦曲线来代替原来的曲线呢?为什么这么麻烦把信号表达成三角函数形式,第一,这是因为三角函数作为线性系统的输入时具有频率不变的特性,一个正弦曲线信号输入后,输出的仍是正弦曲线,只有幅度和相位可能发生变化,但是频率和波的形状仍是一样的。这个特性为系统特性的描述以及一些问题的解决带来了很大的方便,可以更加简单地处理原来的信号。第二,傅里叶变换三角形式基于正交函数系的概念,正弦和余弦函数相互正交。正交性保证了在展开函数时各频率成分的独立性。第三,傅里叶变换是数字信号处理领域一种很重要的算法。傅里叶原理表明:任何连续测量的时序或信号,都可以表示为不同频率的正弦波信号的无限叠加。而根据该原理创立的傅里叶变换算法利用直接测量到的原始信号,以累加方式来计算该信号中不同正弦波信号的频率、振幅和相位。

4.2 复指数形式的傅里叶变换

根据欧拉公式,三角函数又能化成复指数形式:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

复指数形式的傅里叶变换其形式更加简练,以 e 为底的指数函数的微分之后依然是指数函数,计算更加方便。

傅立叶变换最伟大之处就是让函数在时域和频域可以相互转化。最显而易见的应用就是:当输入函数和单位冲激响应函数都被转化为频域函数后,两个频域函数直接做乘法(相对于上面说的时域函数的卷积),就可以得到输出的频域函数。最后再利用傅里叶反变换回到时域,就可以得到输出的时域函数。

和傅里叶变换算法对应的是反傅里叶变换算法:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t} dt$$

4.3 时域和频域分析

时域和频域分析是研究信号与系统的两种基本方法。

时域是以时间为横坐标, 时域分析就是观察一事物随时间的变化规律。

频域则是以频率为横坐标, 频域分析就是在观察一事物在不同频率上的分布情况。这时, 时间就不再是一个变量。

时域分析与频域分析是对信号的两个观察面。一般来说, 时域的分析较为形象与直观, 频域分析则更为简练, 剖析问题更为深刻和方便。它们是互相联系, 缺一不可, 相辅相成的。

在信号分析中时域分析是指在时间上分析信号(波形、幅度、相位, 周期等特征)。

在信号分析中频域分析则指在频率上分析信号(功率谱、频谱、相位谱等特征)。它不是真实的, 而是一个数学构造。

通过傅立叶级数和傅立叶变换。可以实现时域信号和频域信号互换。

为什么要进行频域分析? 由于频域分析具有很多时域所不具有的特点, 故可以比较方便的对原信号进行分析。①信号不只和时间有关, 还和频率有关, 在不同频率下信号的响应是不一样的, 所以就要知道信号随着频率是怎么变化的。②信号的计算, 在时间域内往往要解微分方程, 而用傅立叶和拉普拉斯变换到复频域后就变成了代数方程, 求解起来很方便。③从频谱图上可以看到幅值和相位随着频率变化是如何响应的。

傅立叶变换的主要作用就是让函数在时域和频域可以相互转化: 当输入函数和单位冲激响应函数都被转化为频域函数后, 两个频域函数直接做乘法(相对于上面说的时域函数的卷积), 就可以得到输出的频域函数。最后再反变换回时域, 就可以得到输出的时域函数。

傅里叶变换不仅仅是一个数学工具, 更是一种可以彻底颠覆一个人以前世界观的思维模式。通过傅里叶分析可以变换时空, 用另一种角度看世界。再也, 傅里叶变换, Z 变换, 拉普拉斯变换等, 在内容结构上几乎是完全一样的, 各自的应用场景不同而已。因此只要搞清楚的傅里叶变换, 其他变换也就迎刃而解了。

5. 结语

在《信号与系统》教学中, 数学是不可或缺的核心内容,

可以帮助我们更好地理解和处理信号与系统中的问题, 如何讲好数学是讲好这门课程的关键所在。

(1)通过复指数函数教学案例, 讲述了数学基础对于《信号与系统》课程的重要性。对于重要的理论和方法, 数学要讲透, 关键点上务必深入, 来龙去脉一定讲清楚, 并引导学生去理解和领会其推导的思维过程, 绝不能蜻蜓点, 水泛泛而谈。

(2)通过欧拉公式案例, 讲述了基本公式及其应用。《信号与系统》是一门由数学语言描述的“理论课”, 数学公式是数学语言中的基本元素, 可以精确地描绘信号和系统概念、计算、转换和分析。因此, 掌握数学公式及其应用对于解决信号和系统实际问题至关重要。第一公式要理解; 第二注意公式的应用; 第三做习题巩固。

(3)通过卷积教学案例, 讲述了如何理解概念的本质。在学习信号与系统时, 我们会接触到一些概念, 例如卷积、相关、功率谱等。要这些概念与数学联系起来, 正确理解这些概念的本质, 掌握它们对应的物理意义, 才能更好地进行计算和应用。

(4)通过傅里叶变换教学案例, 讲述了如何借助数学工具, 做好信号与系统的转换和分析。其他如 Z 变换, 拉普拉斯变换等, 在内容结构上几乎相同, 只是使用条件不同, 应用在不同场合而已。

[参考文献]

[1]潘双来, 邢丽冬, 胡寿松. 信号、系统与控制课程群建设[J]. 电气电子教学学报, 2004, (6): 24-26.

[2]陈后金, 胡健, 薛健等, 我校“信号与系统”(课程的改革与建设[J]. 电气电子教学学报, 2004. (6): 30-32.

[3]张贤达, 保铮. 通信信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.

[4]童峰, 李霞. Matlab 在“信号与系统”课程教学中的应用[J]. 电气电子教学学报, 2007. 29 (2): 82-84.

[5]程鉴南. 《信号与系统》课程教学中几个关键难点的理论解析和逻辑梳理[J]. 科技研究, 2024. 7 (2): 47-50.

作者简介: 程鉴南, 1995 年出生, 硕士, 讲师, 主要通信技术的教学和科研工作。