

考虑时间因素的纤维束模型雪崩失效过程研究

乔争气

喀什市住房和城乡建设局 喀什 844000)

DOI:10.32629/ems.v8i6.20567

[摘要] 纤维束模型是研究纤维材料力学特性的一种有效方法,然而很少有人研究纤维束模型雪崩失效能量释放过程。首先回顾了纤维束模型的主要特征,推导了弹性能和总损伤能的数学方程。提出了表征雪崩失效过程能量释放快慢的速率公式,而后结合均匀分布、幂次分布与韦布尔分布,论证了弹性能导数峰值与能量释放速率存在的强关联性。结果表明:提出的雪崩释放速率公式能够表征雪崩灾变过程的时间尺度,雪崩释放速率与弹性能导数峰值和加载速率呈现正相关性,有一定的应用价值。

[关键词] 纤维束模型; 雪崩; 阈值分布; 雪崩失效

[中图分类号] 0344

[文献标志码] A

引言

纤维材料广泛应用于工程领域,理解并预测其力学响应至关重要,研究纤维材料力学行为的关键工具之一是纤维束模型。纤维束模型最早被Pierce在1926年引入,是研究纤维材料在各种载荷条件下失效和破坏的重要理论方法之一^[1]。过去将近一个世纪,由于纤维束模型在模拟临界现象中扮演了不可或缺的角色,在工程应用广泛。

近年来世界各国研究人员应用此模型从理论和试验两方面探索,积累了丰富的成果。然而,对于纤维束模型的灾难性雪崩失效过程,雪崩过程会持续多长时间,影响雪崩失效过程能量释放因素有哪些,目前很少有文献回答这些问题。

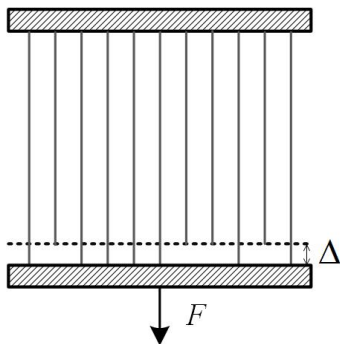


图1 纤维束模型示意图

1 纤维束模型

从统计物理学的观点来看,单向纤维复合材料可以简化

为几个特征性质。存活的纤维承担断裂纤维的载荷,按荷载分配方式的不同划分出两类:全部纤维共同承担载荷和只考虑局部纤维承担载荷,局部纤维承担载荷必须通过数值模拟求解^[2],因此本文基于全部纤维共同承担载荷的纤维束模型。

纤维束模型由三个要素组成: N 条平行纤维、两边的固定夹和平行于纤维的力 F,如图1。每条纤维刚度相同,在力 f 作用下伸长 Δ ^[3]:

$$f = \kappa \Delta \quad (1)$$

式中, κ 表示弹簧刚度。每根纤维有一个拉伸阈值,如果伸长量 Δ 大于该阈值,纤维立即断裂失效。全部纤维共同承担载荷方案中,两边的夹具默认为刚性,随着伸长量 Δ 的增加,部分阈值小的纤维率先断裂,荷载将均匀地分担给未断裂纤维。

每根纤维的伸长量阈值服从概率密度函数 $p(x)$, 累计概率分布函数的数学公式见公式(2)。假设 n 根纤维先失效,伸长量 Δ 处纤维束合力为 F。纤维束失效程度定义为 d, d 为已断裂纤维数量 n 与所有纤维数量 N 的比值。当 N 趋于无穷大时, d 变成一个连续值,其关系式为:

$$P(x) = \int_0^x p(x') dx' \quad (2)$$

$$F = \kappa(N - n)\Delta = N\kappa(1 - d)\Delta \quad (3)$$

$$d = n / N \quad (4)$$

根据损伤力学和材料力学原理, 外部荷载 F 作用下被拉伸 Δ , 未断裂纤维储存的弹性能与已断裂纤维损伤的能量见下面公式:

$$E^e(\Delta, d) = \frac{N\kappa}{2} \Delta^2 (1-d) = \frac{N\kappa}{2} \Delta^2 (1-P(\Delta)) \quad (5)$$

$$E^d(\Delta, d) = \frac{N\kappa}{2} \int_0^d [P^{-1}(x)]^2 dx = \frac{N\kappa}{2} \int_0^\Delta p(x) x^2 dx \quad (6)$$

式中, $E^e(\Delta, d)$ 表示弹性能, $E^d(\Delta, d)$ 表示断裂纤维损伤能。注意, 当拉伸量为 Δ 时, 伸长量阈值 $P(\Delta) < \Delta$ 的纤维会断裂, 因此已断裂纤维所占比例 $d = P(\Delta)$ 。进一步可得到下述公式:

$$F = \kappa(N-n)\Delta = N\kappa(1-P(\Delta))\Delta \quad (7)$$

断裂时每根纤维内力达到最大值, 纤维失效, 因此必然存在失效点 Δ_c , 此时 $dF(\Delta)/d\Delta = 0$, 得到下述方程

$$1 - \Delta_c p(\Delta_c) - P(\Delta_c) = 0 \quad (8)$$

2 雪崩释放速率定义与失效时间

假设雪崩从开始到结束拉伸速率恒定, 拉伸长短对应每根纤维的伸长, 因此可以得到 $d\Delta/dt = v$, 进一步转换公式得到:

$$\Delta = v(t - t_c) + \Delta_c \quad (9)$$

式中, t 代表纤维束模型雪崩开始 t_c 到雪崩结束 t_{end} 时刻, $t_c \leq t \leq t_{end}$, v 表示夹具拉伸速率, 这里是常数。雪崩过程结束时 $\Delta = 1$, 得到公式 (10):

$$t_{end} - t_c = \frac{1 - \Delta_c}{v} \quad (10)$$

显然, 纤维束模型的雪崩失效快慢与失效点和拉伸速率有关。失效点越早, 灾变过程持续时间越长; 拉伸速率越快, 灾变过程持续时间越短。

雪崩能量释放速率 $\dot{E}_{ava}$ 定义为雪崩过程中释放的总损伤能 E_{final}^d 除以持续时间 $t_{end} - t_c$, 见方程 (11) 至 (12)。雪

崩释放速率量化了雪崩过程的剧烈程度: 夹具拉伸速率与总损伤能量越大, 失效点越早, 失效过程耗费时间越长。因此, 其定义符合纤维复合材料断裂规律。

$$\dot{E}_{ava} = \frac{E_{final}^d}{t_{end} - t_c} = \frac{vE_{final}^d}{1 - \Delta_c} \quad (11)$$

$$E_{final}^d = \frac{N\kappa}{2} \int_{\Delta_c}^1 p(x) x^2 dx \quad (12)$$

3 三种分布计算

常用的三种分布函数有均匀分布、幂律分布和韦布尔分布, 下面详细计算。

3.1 均匀分布

均匀分布是纤维束模型中最常用的阈值分布模型, 阈值为 $[0, 1]$ 的均匀分布, 其为分布函数为 $P(x) = x$, 概率密度函数 $p(x) = 1$ 。代入公式 (8) 可得 $\Delta_c = 0.5$ 。将阈值函数代入得:

$$M = \frac{dE^e(\Delta_{max})}{d\Delta_{max}} = \frac{N\kappa}{6} \quad (13)$$

$$\dot{E}_{ava} = \frac{7}{24} N\kappa v \quad (14)$$

式中, M 表示弹性能一阶导数峰值。观察方程 (17) 和 (18), 弹性能导数峰值与雪崩释放速率的关联性公式见方程 (15)。从方程 (15) 中可以看出, 均匀分布中雪崩释放速率 $\dot{E}_{ava}$ 与 M 、 v 均成正比, 拉伸速率越大, 雪崩释放速率越大。

$$\dot{E}_{ava} = \frac{7}{4} \cdot M \cdot v \quad (15)$$

3.2 幂律分布

满足在双对数坐标下表现为一条斜率为负数直线的分布, 称为幂律分布。阈值为 $[0, 1]$ 的幂律分布概率密度函数为 $p(x) = (1 + \alpha)x^\alpha$, 计算得到:

$$M = \frac{dE^e(\Delta_{max})}{d\Delta_{max}} = \frac{N\kappa}{2} \cdot 2\Delta_{max} \cdot \frac{1 + \alpha}{2 + \alpha} \quad (16)$$

$$\dot{E}_{ava} = \frac{v \cdot N\kappa}{2} \cdot \frac{1+\alpha}{3+\alpha} \cdot \frac{1-(2+\alpha)^{\frac{3+\alpha}{1+\alpha}}}{1-(2+\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}}} \quad (17)$$

经方程 (16) 和 (17) 变换, 弹性能导数峰值 M 与雪崩释放速率 $\dot{E}_{ava}$ 的关联性公式为方程 (18)。幂律分布中雪崩释放速率 $\dot{E}_{ava}$ 与 M 、 v 均成正比, 拉伸速率越大, 雪崩释放速率越大。

$$\dot{E}_{ava} = \frac{1-(2+\alpha)^{\frac{3+\alpha}{1+\alpha}}}{1-(2+\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}}} \cdot \frac{2+\alpha}{3+\alpha} \cdot \left(\frac{2}{(3+\alpha)(2+\alpha)} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \cdot \frac{Mv}{2} \quad (18)$$

3.3 韦布尔分布

1951 年, 瑞典数学家 Waloddi Weibull 详细解释了韦布尔分布的概念, 于是该分布便以他的名字命名。韦布尔分布的概率密度函数如下:

$$p(x) = \frac{d(1 - \exp(-x^k))}{dx} = kx^{k-1} \exp(-x^k) \quad (19)$$

为了计算方便, 由于 $k = 1$, 代入得 $\Delta_c = 1$, 此时失效点已达到阈值上限。因此令 $k = 2$, 我们可以将阈值方程代入得:

$$M = \frac{dE^e(\Delta_{\max})}{d\Delta_{\max}} = N\kappa e^{-\Delta_{\max}^2} \cdot \Delta_{\max} (1 - \Delta_{\max}^2) = 0.2937N\kappa \quad (20)$$

$$\dot{E}_{avalanche} = \frac{vE_{final}^d}{1 - \Delta_c} = \frac{v \cdot 0.0485Nk}{1 - \sqrt{2}/2} = 0.1656Nkv \quad (21)$$

方程 (20) 和 (21) 变换得方程 (22)。显然, 韦布尔分布中雪崩释放速率 $\dot{E}_{ava}$ 与 M 、 v 均成正比。

$$\dot{E}_{ava} = 0.5638Mv \quad (22)$$

4 雪崩失效时间

对于不同的阈值分布, 雪崩失效过程持续时间呈现出不同的解析形式: 均匀分布下, $t_{end} - t_c = 1/2v$; 幂律分布下见方程 (23), 当 $\alpha = 0$ 时退化为均匀分布的结果; 韦

布尔分布下, 见方程 (24)。雪崩失效时间与阈值分布函数的参数和拉伸速率相关, 拉伸速率越大, 雪崩持续时间越短, 这一规律符合外界荷载越大则系统内部损伤演化越快的物理直觉。

$$t_{end} - t_c = \left(1 - \left(\frac{1}{2+\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right) / v \quad (23)$$

$$t_{end} - t_c = \left(1 - k^{\frac{1}{k}} \right) / v \quad (24)$$

5 结论

本文基于纤维束模型提出了表征雪崩失效过程能量释放快慢的速率公式, 结合均匀分布、幂次分布与韦布尔分布三种常用分布, 推导了弹性能和总损伤能的数学方程, 计算了三种分布雪崩失效时间。结果表明: 提出的雪崩释放速率公式能够表征雪崩灾变过程的时间尺度, 三种分布下雪崩过程能量释放速率均与弹性能导数峰值、加载速率呈现正相关性。为解释纤维复合材料的失效过程、失效时间提供了一种视角, 有一定的应用和参考价值。

[参考文献]

- [1]Midgley E, Pierce F T. The Weakest Link Theorems on Strength of Long and of Composite Specimens[J]. Journal of the Textile Institute, 1926, 17(2): T355-T368.
- [2]Raischel F, Kun F, Herrmann H J. Fiber bundle models for composite materials[C]//Conference on Damage in Composite Materials. 2006.
- [3]Pradhan S, Kjellstadli J T, Hansen A. Variation of elastic energy shows reliable signal of upcoming catastrophic failure[J]. Frontiers in Physics, 2019, 7: 106.

作者简介: 乔争气 (1996—), 男, 汉族, 湖北襄阳, 硕士, 工程师, 研究方向为工程力学。