基于精细积分求逆的移动最小二乘法

孙静涛
三门峡职业技术学院建筑工程学院
DOI:10.12238/jief.v3i1.3593

[摘　要] 移动最小二乘法中多项式基函数的次数越高,函数拟合的效果越好,但随着次数的增加,计算量增大且容易出现病态矩阵。本文通过引入精细积分求逆的方法,解决高次多项式病态矩阵的问题,并通过算例进行验证。
[关键词] 精细积分；病态矩阵；移动最小二乘法
中图分类号：G43　文献标识码：A

Moving Least Squares Method Based on Fine Integration Inversion

Jingtao Sun
School of Architecture and Engineering, Sanmenxia Polytechnic

[Abstract] The higher the degree of polynomial basis functions in moving least squares, the better the function fitting effect, but as the increase of the degree, the computation increases and is prone to a pathological matrix. This paper solves the problem of hyperorder polynomial pathological matrix by introducing the method of fine integration inversion and verified by examples.
[Key words] fine integration; pathological matrix; moving least squares

引言

移动最小二乘法是McLain在1974年提出的一种利用离散样本点通过局部区域内加权最小二乘来构建连续函数的近似方法[3]。该方法权函数具有紧支性。从九十年代初以来,移动最小二乘法在函数逼近、无网格[5]等领域中广泛应用。

以多项式为基函数的移动最小二乘法中,多项式基函数的次数越高,拟合效果越好,精度越高,但求逆计算量越大,容易出现病态矩阵。针对多项是基函数出现的问题,陈美娟提出正交基函数的方法,避免了矩阵求逆运算[3],袁占斌等提出了使用泰勒基函数,用来降低矩阵的条件数,来提高计算结构的稳定性[4]。

精细积分是钟万勰[1]提取的求解一阶常微分方程组的半解析解法,可在计算机上得到常微分方程组的事实上的精确解。富明慧[2]结合精细积分的思想,提出了病态矩阵的求解的精细积分解法。本文将精细积分求逆与移动最小二乘法结合,解决移动最下二乘法中,多项式基函数病态矩阵求逆的问题。

1 病态矩阵精细积分求逆原理

对于线性方程组Ax=b,如果A为病态矩阵,使用普通的高斯消元法求解,结果将严重失真。针对病态方程,富明慧[2][7]结合精细积分的思想,提出了病态矩阵的求解的精细积分解法。

假设矩阵A为正定矩阵,富明慧[6]给出了如下公式

$$\int_0^{\infty} e^{-At}dt = A^{-1} \tag{1}$$

对于病态线性方程组,其精确解可以表示为:

$$x = \int_0^{\infty} e^{-At}dt \cdot b$$

利用精细积分元原理建立该无穷积分$\int_0^{\infty} e^{-At}dt$ 的递推算法,在区间$[0,\tau]$上记：$F(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-At}dt$,则$F(2\tau) = \int_0^{2\tau} e^{-At}dt$

$$\int_0^{2\tau} e^{-At}dt = \int_0^{\tau} e^{-At}dt + \int_{\tau}^{2\tau} e^{-At}dt$$

$$= \int_0^{\tau} e^{-At}dt + \int_0^{\tau} e^{-A}d(t+\tau)$$

$$= [I + e^{-A\tau}]\int_0^{\tau} e^{-At}dt$$

即

$$F(2\tau) = [I + e^{-A\tau}]F(\tau) \tag{2}$$

重复利用(2)式可得

$$F(2^k\tau) = \left[\prod_{i=0}^{k-1}\left(I + e^{-2^{k-i}A\tau}\right)\right]F(\tau) \tag{3}$$

由(3)式可知,随着递推次数的增加,积分上限以指数增加的方式的逼近无穷积分。

2 移动最小二乘法原理

移动最小二乘法由系数向量 $a(x)$和基函数$p(x)$ 组成,已知点 $x_1,x_2\cdots,x_n$,现根据移动最小二乘法原理构造原函数 $u(x)$ 为逼近函数 $u^h(x)$：

$$u^h(x)=\sum_{i=1}^{m}p_i(x)a_i(x) \quad (4)$$

根据加权最小二乘法原理可得

$$J(x)=\sum_{k=1}^{n}w(x-x_k)\left[\sum_{i=1}^{m}p_i(x_k)a_i(x_j)-u(x_k)\right]^2 \quad (5)$$

对于任意一点 x_j ，误差函数可以写成如下表达式

$$J(x_j)=\sum_{k=1}^{n}w(x_j-x_k)\left[\sum_{i=0}^{m}p_i(x_k)a_i(x_j)-u(x_k)\right]^2 \quad (6)$$

$$P(x)=\begin{bmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^m\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^m\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m\end{bmatrix} \quad a(x_j)=\begin{bmatrix}a_1(x_j)\\ a_2(x_j)\\ \vdots\\ a_m(x_j)\end{bmatrix} \quad u(x)=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}$$

$$W=\begin{bmatrix}w(x_j-x_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & w(x_j-x_2) & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & w(x_j-x_k)\end{bmatrix}$$

$$J(x_j)=\left(P(x)a(x_j)-u(x)\right)^T W\left(P(x)a(x_j)-u(x)\right) \quad (7)$$

误差函数 $J(x_j)$ 对 $a(x_j)$ 求偏导数可得

$$\frac{\partial J(x_j)}{\partial a(x_j)}=P^TW\left(P(x)a(x_j)-u(x)\right) \quad (8)$$

误差函数取极值，则 $\frac{\partial J(x_j)}{\partial a(x_j)}=0$，即：

$$P^TWP(x)a(x_j)-P^TWu(x)=0 \quad (9)$$

令矩阵 $A(x_j)=P^TW(x_j)P$，$B=P^TW(x_j)$，$w(x_j)=\sqrt{W(x_j)}$ 对于权重矩阵为 $W(x_j)$ 拆分为两个 $w(x_j)$ 的乘积，则矩阵 $A(x_j)=(w(x_j)P)^T(w(x_j)P)$，因此矩阵 $A(x_j)$ 为正定矩阵，可以使用精细积分方法求其逆矩阵。

方程(9)可以改写为：

$$A(x_j)a(x_j)-B(x_j)u(x)=0 \quad (10)$$

求解线性方程(10)

$$a(x_j)=A(x_j)^{-1}B(x_j)u(x) \quad (11)$$

故

$$u^h(x_j)=P(x)a(x_j) \quad (12)$$

当基函数的次数越高时，矩阵A的条件数就越大，严重影响结果的精确性。

3 算例

x=[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0] y=[0, 4, 5, 14, 15, 14.5, 14, 12, 10, 5, 4]

利用移动最小二乘法拟合曲线，在基函数为四次多项式。系数矩阵A出现了严重的病态，普通求逆的方法的计算结果如图2所示，在端点附近处出现剧烈的波动。基于精细积分求逆的解法，计算结果如图1所示，曲线拟合结果，在端点附近并没有出现剧烈的波动。

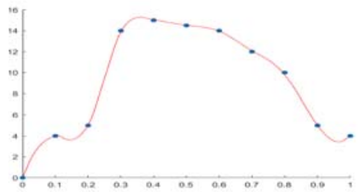

图1　精细积分计算结果

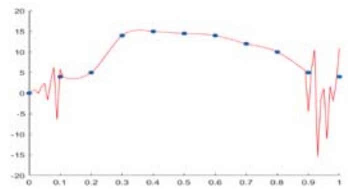

图2　常规算法计算结果

4 结论

本文使用精细积分求逆的方法解决移动最小二乘法高次多项式基函数病态矩阵的问题，通过数值算例，运用两种不同的方法求解结果的对比，说明了方法的有效性。

[参考文献]

[1]钟万勰.应用力学对偶体系[M].科学出版社,2002.

[2]富明慧,张文志.病态代数方程的精细积分解法[J].计算力学学报,2011,(4):530-534.

[3]相智博.移动最小二乘法矿山地面沉降监测数据同化和预测模型[D].太原理工大学,2019.

[4]袁占斌,聂玉峰,欧阳洁.基于泰勒基函数的移动最小二乘法及误差分析[J].数值计算与计算机应用,2012,33(1):25-31.

[5]李忠芳.一维结构动力响应的无网格—精细积分方法研究[D].山东理工大学,2005.

[6]富明慧,李勇息,张文志.求解病态线性方程的一种精细格式及迭代终止准则[J].应用力学学报,2018,035(002):346-350.

[7]富明慧,张文志.病态代数方程的精细积分解法[J].计算力学学报,2011,28(004):530-534.

作者简介：

孙静涛(1989--),男,汉族,河南三门峡人,硕士,助教,研究方向：隧道地质超前预报。