

浅析高三数学解析几何校本化教学

施广存

扬州市江都区邵伯高级中学

DOI:10.12238/jief.v4i2.4863

[摘要] 本文从阐释课程改革实施背景入手,针对“四基”目标在数学教学中渗透的思路进行大体分析,围绕引入思维导图教学模式、聚焦模块开展运算训练、渗透多种数学思想方法、创设情境导入教学活动四个层面,探讨了基于“四基”目标的高三数学解析几何教学创新策略,以期课程改革目标的落实以及教学理念与教学实践的创新提供参考价值。

[关键词] 高三数学; 解析几何; 校本化; 四基目标

中图分类号: G623.5 **文献标识码:** A

Analysis on School-based Teaching of Mathematical Analytic Geometry in Senior Three

Guangcun Shi

Shaobo Senior High School in Jiangdu District, Yangzhou City

[Abstract] Starting with explaining the background of curriculum reform, this paper makes a general analysis of the idea of "Four Basics" goal in mathematics teaching, and discusses the innovative strategies of analytic geometry teaching in senior three mathematics based on the "Four Basics" goal from four aspects: introducing mind mapping teaching mode, focusing on modules to carry out operation training, infiltrating various mathematical thinking methods and creating situations to introduce teaching activities, so as to provide reference value for the implementation of curriculum reform goal and the innovation of teaching ideas and practice.

[Key words] Mathematics in the third grade of senior high school; Analytic geometry; School-based; "Four Basics" Goal

引言

数学解析几何类问题在高考中占据较大分值,命题在知识层面侧重于考察问题提出的背景、基本定义及问题解决过程中的几何转化知识,在能力层面则集中考察学生对于数形结合、类比迁移、差异分析等思想方法的实践运用能力。在课程改革理念的指导下,教师应主动进行校本化探索“四基”目标在数学教学中的渗透与融合路径,助力学生学科素养的发展。

1 课程改革下教学目标的迁移与重构

1.1 课程改革实施背景。传统课堂教学片面强调“双基”目标,《普通高中课程标准(2017版)》在原有“双基”课程目标的基础上增加了“基本思想”和“基本活动经验”,由此形成数学“四基”目

标,为数学课程改革的实施提供重要指导与参考依据^[1]。

1.2 “四基”目标在数学教学中的渗透。针对数学教学的“四基”目标进行解读,其中原有“双基”目标是核心内容,“基本思想”是内在表现形式,“基本活动经验”是教学主要任务。

一是“基础知识”,聚焦数学学科的基本概念、定理与性质,要求教师依托历史背景介绍、再现推导过程等方式帮助学生建立对概念、公式、定理的完整认知,以基础知识为载体为数学学习创设良好平台基础。

二是“基本技能”,强调渗透数学方法与技能的教学,要求学生在数学训练中掌握一定的运算程序方法、数据分析处理与读图作图等技能,使学生灵活运用数学知识。

三是“基本思想”,数学思想方法是隐含在数学教材中的一条暗线,通常指对数学知识、规律、框架进行深层概括,涵盖数形结合、类比、分类讨论等思想,通过培养学生形成数学思维、掌握数学方法,实现由知识向能力的转化。

四是“基本活动经验”,主要指学生在体验数学活动过程中收获的多种经验,包含解决问题的经验,和参与数学活动中观察、分析、思考、探索的经验^[2]。

2 基于“四基”目标的高三数学解析几何教学创新策略

2.1 引入思维导图教学模式,建构基础知识框架。基础知识为数学思维活动的实施提供载体。在高三数学教学中,学习解析几何内容时涉及到新旧知识的过渡与整合,教师应注重带领学生掌握知识整合与体系建构的具体思路,引入

思维导图教学模式完成知识框架图的建构。以“圆锥曲线”模块为例,该模块大体包含曲线与方程、椭圆、双曲线、抛物线四个分支,在曲线与方程板块延伸出轨迹方程的求法,在椭圆、双曲线、抛物线三个模块分别延伸出定义、标准方程、性质、离心率等内容,并联系直线与方程、圆与方程等知识模块细化条件转化形式、运用范围的标注,更好地将解析几何知识系统化、可视化呈现。

2.2聚焦模块开展运算训练,强化基本技能培训。基本技能培训是高中数学教学的重点内容之一,强调引导学生在理解基本知识、概念与定理的基础上,能够掌握运算程序、作图方法、推理演绎等技能。解析几何知识模块将代数与几何知识进行整合,通过培养学生的识图技能使其能够根据图形推断出性质,依据已知条件绘制出几何图形,并熟练掌握运算方法、提高计算能力^[3]。以运算能力的培养为例,教师可围绕直线与曲线方程联立、弦长公式、分式函数最值等开展运算训练,在此过程中渗透知识的整合与转化思维。

以题为例:

例1、我在圆锥曲线的第一堂课讲解了圆锥曲线的定义。椭圆与双曲线都有两个定义,一个是借助两个定点给出,“焦点”是我们给出的这两个点的名字;另一个则是借助一个定点和一条定直线给出,“焦点”和“准线”分别是它们的名字,而动点与二者的距离之比被命名为“离心率”。定义中出现的这些元素通常会与标准方程进行互推,因此强化定义、掌握标准方程十分重要。我为学生提供了两个例题。第一题是椭圆,给出了 $e=1/2$,准线为直线 $x=4$,且一个焦点 $F(2,0)$,那么它的标准方程是什么呢?这是典型的互推题,可以根据定义求出。根据离心率、准线、焦点的数学意义,可以列出方程 $\{\sqrt{[(x-2)^2+y^2]}/|x-4|=e=1/2\}$,整理可得其方程: $3x^2-8x+4y^2=0$ 。第二题则反着来,给出了椭圆的方程,即: $3x^2+4y^2=12$,且知其上面一点与右焦点的距离是2.5,那么它到左准线的距离是多少?看到题目中的“焦点”

“准线”,学生确定从定义的角度求解。根据标准方程,可知 $a=2$,而且该点与右焦点距离为2.5,因此与左焦点距离为 $2a-2.5=4-2.5=1.5$ 。又有 $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$,所以 $e=c/a=1/2$,所以其与左准线的距离为 $1.5/1/2=3$ 。该题答案即为3。

由上可知,当题目中出现了“焦点”“准线”等词时,借助圆锥曲线的定义,通过标准方程,学生可以很快找到思路并作答。

$$\text{例2、已知椭圆方程 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

过点 $P(0,3)$ 作直线 L 与椭圆分别交于 M 、 N 两点,求 $|\frac{MP}{NP}|$ 的取值范围。在解答该题时,学生往往能意识到需将弦的长度比转化为坐标比进行求解,但在此过程中不同解题方法涉及到的运算量也存在差异。常规解题方法考察学生能否利用

韦达定理表示 $\frac{x_1}{x_2}$,在运算过程中涉

及到分式函数值域、换元等方法,但运算量较大;对此教师可指导学生基于“设而求之”理念直接求解出方程的根,由

$$\begin{cases} y=kx+3 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{推出 } X = \frac{-54k \pm \sqrt{\Delta}}{2(4+9k^2)},$$

将其代入 $\frac{x_1}{x_2}$ 中即得出

$$\frac{x_1}{x_2} = -1 + \frac{108}{54-12\sqrt{9-\frac{5}{k^2}}}, \text{ 由}$$

$$k^2 > \frac{5}{9} \text{ 得出 } \frac{1}{5} \leq |\frac{MP}{NP}| < 1,$$

该解法在数据处理上较简单,可有效锻炼学生的运算思维。

2.3渗透多种数学思想方法,充分运用条件转化。在落实“双基”目标的基础上,教师应将教学目标提升至更高层次,依

托图形语言与条件的转化,强化数学思想方法在解析几何教学中的融合与渗透^[4]。

2.3.1融合方程思想。数形结合主要指利用几何图形解决代数问题,方程思想则主张依托代数观念解决几何问题,实现图形问题的代数化。

其一是转化垂直条件,由于解析几何知识中常包含垂直条件,如在解决“以弦 AB 为直径的圆过定点”类问题时便涉及到垂直条件的转化与运算。以下题为例:“已知有长方形 $ABCD$,其中 $AB=BC=1$,以 AB 中点为原点建立直角坐标系。(1)现有一以 A 、 B 为焦点且过 C 、 D 两点的椭圆,求该椭圆的标准方程;(2)过点 $P(0,2)$ 有一直线与椭圆交于 M 、 N 两点,求是否存在一直线 l 使以弦 MN 为直径的圆恰好经过原点?”在解决该题时,教师可指导学生通过解读题目寻求其中隐含的垂直条件,聚焦“以弦 MN 为直径的圆恰好经过原点”这一垂直问题的典型语句,引导学生

采用 $k_1 \cdot k = -1$ 或 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$ 将垂直条件转化为方程式进行运算,以快速解题。

其二是利用韦达定理进行条件转化,以下题为例:“已知点 $A(-2,0)$ 、 $B(2,0)$,有一动点 P 满足 $\angle APB=2\theta$,且 $|PA| \cdot |PB| \sin 2\theta = 2$ 。(1)求 P 的轨迹方程;(2)过点 B 有一直线 l 与 P 的轨迹方程 Q 分别交于点 M 、 N ,求在 x 轴上是否存在一定点 R 使 $\overrightarrow{RM} \cdot \overrightarrow{RN}$ 为常数?”该题主要考察学生对于双曲线定义、余弦定理的掌握,教师应指导学生应用韦达定理解决问题,依据题目条件 $\overrightarrow{RM} \cdot \overrightarrow{RN}$ 建立含参数方程,利用方程解决定值问题,有效提高轨迹方程问题的求解效率。

2.3.2综合向量,简化运算过程。在求解圆锥曲线问题时,利用向量的有关特征,对运算过程进行简化,可以将复杂问题简单化,大大减少解题时间。

比如在复习“向量与圆锥曲线”这一节时,可以用向量求解的圆锥曲线问题。这类题目的关键在于几何特征与数

量特征的相互转换。有的题目是给出向量的关系,利用向量的性质求解问题。以下题为例,双曲线的方程为 $x^2 - y^2/3 = 1$,有一个点在其上,且满足,想要知道的是,这个点距x轴多少?根据向量的性质,两个向量点乘得零,证明二者相互垂直。这就意味着两条直线垂直, $\triangle BF_1F_2$ 是直角三角形。根据双曲线的性质,这两个线段的长度之差是 $2a$ 也就是2,焦点之间的距离为 $2c$ 也就是4。利用直角三角形的特征, $|BF_1|^2 + |BF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 16$ 。进一步可得两条线段的乘积6,三角形的面积即为3。所以该点与x轴的距离为 $2 \times 3/4 = 3/2$ 。有的题则是给出几何性质,将其转化为向量后求解。如已知椭圆方程 $x^2/20 + y^2/4 = 1$,已知两点 $B(-2, 0)$, $D(2, 0)$,求经过B点与椭圆有U、V两个交点,使得 $UD \perp VD$ 的直线方程。最后这一关系其实可以转化为向量关系。首先设出直线方程 $x = my - 2$ 并带入椭圆中,将交点的坐标写出,则很容易得到两个向量的坐标,直接使两个向量进行点乘操作,坐标按照规则处理,进而构造出 y_1 和 y_2 的积与和的形式。如此建立起的方程就可以求出未知数 m 的值,即为 ± 2 ,所以直线的方程分别为 $x + 2y + 2 = 0$ 和 $x - 2y + 2 = 0$ 。

代数数和几何形式都可以对向量进行描述,其综合的特征使其成为各项知识的媒介,可以进行知识间的转化,且在转化过程中,可以简化相关数学问题求解,简化运算过程。

2.3.3 渗透函数思想。函数思想在高中数学知识体系中贯穿全局,在解答解析几何中有关求最值、求取值范围等问题时,便可通过变量分析建立相应的函数关系,完成解析几何问题的求解。例如基于函数的三大性质可推理出某些几何图形中蕴含的函数性质,利用导数知识可以解决最值问题,在此过程中借助转化与化归的思想方法,有效解决复杂的解析几何难题。

其一是将向量条件进行转化,以下题为例:“已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F_1 ,点 F_2 与 F_1 关于坐标原点O对称,有一与x

轴垂直、交点为T的直线m与该抛物线分别交于P、Q两点,且 $\overrightarrow{F_1P} \cdot \overrightarrow{F_2Q} = -5$ 。

(1)求T点的横坐标;(2)假设以 F_1 、 F_2 为焦点的椭圆C过点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$,求该椭圆的标准方程;有一直线l过点 F_1 与椭圆交于A、B两点,设 $\overrightarrow{F_1A} = \lambda \overrightarrow{F_1B}$,已知 $\lambda \in [-2, -1]$,求 $|\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB}|$ 的取值范围。”

在指导学生解答该题时,根据问题可初步判断需将 $|\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB}|$ 转化为关于自变量

λ 的函数关系式,在求解 $|\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB}|$ 的取值范围时涉及到函数思想的应用,由此推断出该题的本质是求解函数的值域。通过调用学过的二次函数图像、性质与最值等知识,经由换元即可解答解析几何中的最值问题。

其二是将长度条件进行转化,以下题为例:“已知椭圆C $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$:上存在M、N两点,直线OM、ON斜率的积为

$-\frac{1}{2}$,且存在一动点P(x, y)满足条件 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$ 。(1)求 $x^2 + 2y^2$ 的

值;(2)设动点P的轨迹为曲线C1,当有一直线 $y = x + t$ 与曲线C、C1分别交于A、B、C、D四点,求 $|AB| + |CD|$ 的最小值。”解决该题时,可运用转移代换思想求解轨迹方程,通过解读图像可将求解 $|AB| + |CD|$ 最小值转化为求解线段 $|AD| - |BC|$ 最小值,利用图像完成问题的转化,并且结合学过的根式函数性质、最值问题,经由分子有理化后顺利求解解析几何最值问题。

2.4 创设情境导入教学活动,深化基本活动经验。“基本活动经验”是学生在数学活动过程中产生的体验与感受,包含基础知识、技能方法与情感价值等层面的经验,在实践活动中培养学生形成

对数学的直觉、深化其理解能力,促进其思维层次的提升,实现由经验向素养的内化。基于习得理论进行学习活动的分析,学生在学习新知的过程中往往将寻求新知与既有知识经验间的关联性,倘若无法建立新旧知识间的关系,则需由教师利用先行组织者策略进行教学活动创新设计,依托情境导入实现新旧知识间的迁移与过渡,实现教学目标。

例如在复习“椭圆及其标准方程”问题时,教师可利用Flash演示神舟十一号航天器进入太空后的运行轨迹动画,引导学生重新回顾有关椭圆定义、性质等知识;随后引入动手探究实验,将绳索两端分别固定在 F_1 、 F_2 两点上,在绳长大于线段 $|F_1F_2|$ 长度的条件下移动铅笔绘制出绳索移动轨迹,在此过程中引出 $|MF_1| + |MF_2|$ 分别在大于 $|F_1F_2|$ 、小于 $|F_1F_2|$ 、等于 $|F_1F_2|$ 三种情况下的轨迹形状,直观地建立椭圆与圆、线段知识的关联性,为椭圆标准方程的巩固与温习创设良好基础。

3 结论

新课程改革以“四基”目标为核心理念,强调应以学生为中心进行教学理念、教学方法的调整与创新,校本化研究教学,引导学生真正立足于学习主体地位,在理解数学知识、掌握基本技能的基础上,深入知识推导与问题解决的过程中获取数学思想方法与经验,并将其内化为学科素养,满足学生的个性发展、全面发展的需求,更好地践行创新型人才的培养目标。

[参考文献]

- [1]谭瑞军.核心素养视域下高中数学课堂教学的思考——以高中解析几何的教学困境为例[J].中学数学月刊,2018,(12):11-14.
- [2]李启梅.高三解析几何解题教学中的几点做法[J].中学数学教学,2019,(4):35-38.
- [3]那丽萍.数学建模思想在高中数学解析几何教学中的应用[J].中外交流,2018,(08):231.
- [4]段静.数形结合思想在高中数学解题中的应用——以解析几何为例[J].读写算:教师版,2018,(01):53.