第 9 卷◆第 2 期◆版本 1.0◆2026 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

Thompson 群的一个新数量刻画

兰林　杨润　万琴琴
四川民族学院数理与统计学院
DOI:10.32629/mef.v9i2.19154

[摘　要] 设 G 是有限群，$\pi(G)$ 为 G 的阶的素因子的集合，p_m 为 $\pi(G)$ 的最大元，$\pi_{p_m}(G)$ 表示群 G 的 p_m 阶元中心化子的阶的集合。本文利用群的偶阶分量与群的 G 最高阶元中心化子的阶的集合给出了Thompson群 Th 的一个数量刻画。我们证明：有限群 G 与散在单群 M 同构当且仅当：(1) G 与 M 的偶阶分量 m_1 完全相同；(2) $\pi_{p_m}(G)=\pi_{p_m}(M)$，这里 M 是有限单群 Th。

[关键词] 有限单群；散在单群；偶阶分量；中心化子
中图分类号：TK314　文献标识码：A

A New Characterization of Thompson Groups

Lin Lan　Run Yang　Qinqin Wan
Institute Of Mathematics And Physics Of Sichuan Minzu College

[Abstract] Let G be a finite group, let $\pi(G)$ denote the set of prime divisors of the order of G, and let p_m represent the largest element in $\pi(G)$. Denote by $\pi_{p_m}(G)$ the set of orders of centralizers of elements of order p_m in G.In this paper, we provide a quantitative characterization of the Thompson group and group by means of the even order components of G and the set of orders of centralizers of elements of maximal order in G. Specifically, we prove that a finite group G is isomorphic to a sporadic simple group M if and only if the following conditions hold: (1) the even order components of G and M coincide completely; (2) $\pi_{p_m}(G)=\pi_{p_m}(M)$, where M is either the Thompson group.

[Key words] finite simple groups; sporadic simple groups; even order components; centralizers

1 引言

1.1本文所提到的群都是有限群

众所周知，有限群的阶以及其元素的阶与群的结构有着极其紧密的联系，Thompson著名的奇阶群可解定理就是一个很明显的例证。另一方面，自二十世纪八十年代有限单群分类定理宣告完成之后，利用有限单群的数量关系来刻画有限单群成为有限群的一个很重要的研究课题，例如施武杰教授的用群的阶和元素的阶刻画有限单群，陈贵云教授利用阶分量刻画单群等等，这方面的成果丰硕，在此就不一一列举。

设 G 是有限群，K.W.Gruenberg和O.Kegel定义了 G 的素图Γ(G)如下：G 的顶点集为 $|G|$ 的全部素因子的集合，两个顶点 p 与 q 相邻当且仅当 G 中有 pq 阶元。G 的素图连通分支的个数记为 $t(G)$，G 的素图中连通分支的集合记为 $T(G)=\{\pi_i(G)\mid i=1,2,\cdots,t(G)\}$。当 G 为偶阶群时，约定 $2\in\pi_1(G)$。若 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{t(G)}$ 是 G 的素图的全部连通分支，则 $|G|=m_1m_2\cdots m_{t(G)}$，其中 m_i 的素因子集 $\pi(m_i)=\pi_i, i=1,2,\cdots,t(G)$，称 $m_1,m_2,\cdots,m_{t(G)}$ 为 G

的阶分量,并记$OC(G)=\{m_1,m_2,\cdots,m_{t(G)}\}$为群$G$的阶分量的集合。为了方便,记群$G$的偶阶分量为$m_1(G)$。陈贵云教授给出了素图不连通的所有单群的阶分量[1]。利用阶分量的概念陈贵云教授和石化国教授等群论学者研究了如下问题：

设G是一个有限群，S是一个非交换单群。如果$OC(G)=OC(S)$,那么G与S是否同构？

不少群论学者深入研究过这一问题,他们的部分成果可参见文献[1-12]。从这些结果来看,阶分量是刻画单群的很有效的数量性质。

1962年,在Amsterdam世界数学家大会上Brauer提出了利用对合的中心化子作为有限单群的标记,之后群论学家们在研究过程中发现有时还有必要考察奇阶元的中心化子,由此我们可以看出,元素的中心化子的性质对有限单群有着很大的影响。

基于上面的原因,本文试图将阶分量和中心化子这两个对单群结构有着深刻影响的概念结合在一起,利用偶阶分量和某些奇阶元中心化子的数量性质来刻画Thompson单群。

2 主要引理

在本文中约定：$\pi(G)$表示群G的阶的素因子的集合；p_m为$\pi(G)$的最大元,$\pi_{p_m}(G)$表示群G的p_m阶元的中心化子的阶的集合；$|\pi(G)|$表示群G的阶的素因子的个数。对于$p_i\in\pi(G)$,S_{p_i}表示G的Sylow p_i子群。其余未经声明的符号是标准的[13]。

下面的结论给出了当$t(G)\geq 2$时有限群的结构。

引理2.1[1]. 设G是有限群,G的素图不连通,则G的结构如下：

(1) G是$Frobenius$群或$2-Frobenius$群；

(2) G有正规列$1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，且$H$是幂零$\pi_1(G)-$群,$G/K$是可解$\pi_1(G)-$群,$K/H$是非交换单群且$|(G/K)|\,|\,|Out(K/H))|$。

注2.1. G设是有限群,G称为$2-Frobenius$群,如果G有一个正规列$1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$,使得$G/H$和$K$是以$K/H$和$H$为核的$Frobenius$群。

引理2.2[1]. 设G是偶阶$Frobenius$群，H是$Frobenius$核,K是$Frobenius$补,则$t(G)=2$，$T(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$,且G的结构为下列之一：

(1)若$2\in\pi(H)$,则K的$Sylow$子群循环；

(2)若$2\in\pi(K)$,则H是交换群,当K可解时,K的奇阶$Sylow$子群循环,$Sylow2-$子群为循环群或广义四元数群；当K不可解时,存在$K_0\leq K$使得$|K:K_0|\leq 2$,且$K_0\simeq Z\times SL(2,5)$,$(|Z|,30)=1$,其中$Z$的$Sylow$子群循环。

引理2.3[1]. G设是偶阶$2-Frobenius$群，则$t(G)=2$，G有正规列$1\trianglelefteq$，$H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$使得$\pi(K/H)=\pi_2(G)$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1(G)$，$|G/K|\,|\,|Aut(K/H)|$,$G/K$和$K/H$均为循环群。特别地,$|G/K|<|K/H|$,$G$可解。

引理2.4[13]. G若是有限群，$N\trianglelefteq G$，则$G/(NC_G(N))\lesssim Out(N)$。特别地,若$C_G(N)=1$,则$N\trianglelefteq G\trianglelefteq Aut(G)$。

3 主要定理及其证明

定理 设G是有限群,M是群$Th(2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 13\cdot 19\cdot 31)$,则$G\cong M$当且仅当：

(1) $m_1(G)=m_1(M)$；

(2) $\pi_{pm}(G)=\pi_{pm}(M)$。

证明：因定理的必要性是显然的,只需证明充分性即可。

此时$m_1(G)=m_1(M)=2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 13$且$\pi_{pm}(M)=\{31\}$

由于$m_1(G)=m_1(M)=2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 13$，故$t(G)\geq 2$,从而由引理2.1可知$G$的结构如下：

(1) G是$Frobenius$群或$2-Frobenius$群；

(2) G有正规列$1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$,且$H$是幂零$\pi_1(G)-$

群，G/K 是可解 $\pi_1(G)-$ 群，K/H 是非交换单群。

但 G 不可能是 $Frobenius$ 群。否则由引理2.2，$G=HK$，其中 H 是 $Frobenius$ 核，K 是 $Frobenius$ 补，$T(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$。

(1)若 $2\in\pi(H)$，则 $\pi(H)=\pi_1(G)$。因 H 为幂零群，可知 $H=S_2\times S_3\times S_5\times S_7\times S_{13}$，$S_i\in Syl_i(H)$，$i=2,3,5,7,13$，且 $S_i\trianglelefteq G$，从而有 $|K|\,|\,|Aut(S_2)|$。但由于 $31\,|\,|K|$，与 $|Aut(S_2)|\,|\,(2^{15}-2^0)(2^{15}-2^1)(2^{15}-2^2)\ldots(2^{15}-2^{13})(2^{15}-2^{14})|$ 矛盾，故 $2\notin\pi(H)$。

(2)若 $2\in\pi(K)$，则由条件 G 的 $Sylow$ $31-$ 子群 S_{31} 正规于 G 且其阶31。将 G 的 $Sylow$ $2-$ 子群作用于 S_{31} 便可得 G 含62阶元，与 $\pi_{pm}(M)=\{31\}$ 矛盾。故 G 不是 $Frobenius$ 群。

G 也不是 $2-Frobenius$ 群，否则由引理2.3，$t(G)=2$ 且 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 $\pi(K/H)=\pi_2(G)$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1(G)$。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^{15}\cdot3^{10}\cdot5^3\cdot7^2\cdot13$，故 $31\in\pi_2(G)$，从而 K 中含31阶元。将 K 的31阶元作用于 H 的某个 $Sylow$ $p-$ 子群就可得到矛盾。故 G 不是 $2-Frobenius$ 群。

于是 G 的结构如引理2.1，即 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使 $\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1(G)$，$H$ 是幂零群，G/K 是可解 $\pi_1(G)-$ 群，K/H 是非交换单群。由于有 $m_1(G)=m_1(M)=2^{15}\cdot3^{10}\cdot5^3\cdot7^2\cdot13$，$t(G)\geq2$，从而 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,5,7,13\}$，$31\in\pi(K/H)$。若 H 非平凡，不妨设 $H=S_2\times S_3\times S_5\times S_7\times S_{13}$，$S_i\in Syl_i(H)$，$i=2,3,5,7,13$，由于 H 是幂零群，故 $S_i\trianglelefteq G$，$i=2,3,5,7,13$。将 K 的31阶元作用于 S_i 就可得 $\pi_{pm}(M)\neq\{31\}$，矛盾，于是有 $H=1$。

这样 G 有正规非交换单子群 K，使 $\pi(G/K)\in\pi_1(G)=\{2,3,5,7,13\}$，$31\in\pi(K)$。由文献[14]可知 K 只能是 ON，$A_1(30)$ 和 Th 之一。

如果 $K\cong ON$，则 $|K|=(2^9\cdot3^4\cdot5\cdot7^3\cdot11\cdot19\cdot31)$，$m_1(G)=2^{15}\cdot3^{10}\cdot5^3\cdot7^2\cdot13$，$m_1(K)=2^9\cdot3^4\cdot5\cdot7^3$，明显 $m_1(K)$ 不整除 $m_1(G)$，矛盾，从而 $K\ncong ON$。

如果 $K\cong A_1(30)$，则 $|K|=(2\cdot3\cdot5\cdot29\cdot31)$，$m_1(G)=2^{15}\cdot3^{10}\cdot5^3\cdot7^2\cdot13$，$m_1(K)=2\cdot3\cdot5$，$2^{14}\cdot3^9\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13\,|\,|(G/K)|\,|\,|Out(A_1(30))|=2$，矛盾，从而 $K\ncong A_1(30)$。

于是我们有 $K\cong Th$，从而 $1\trianglelefteq Th\trianglelefteq G$，此时显然有 $C_G(Th)=1$，又 $Out(Th)=2$，于是由引理2.4可得 $G\cong Th$ 或者 $G\cong Aut(Th)$。如果 $G\cong Aut(Th)$，那么显然 $m_1(G)>m_1(Th)=m_1(M)$，与假设矛盾，于是 $G\cong Th$。

证毕。

[致谢]

本研究工作由四川民族学院自然科学一般项目(编号：XYZB2410ZB)资助。

[参考文献]

[1]Chen G Y,A New Characterization of Sporadic Simple Groups, Algebra Collo- quium[J].3(1)(1996):49-58.

[2]Chen G Y, A new characterization of Suzuki-Ree groups, Science in China(ser A)[J].27(5)(1997):430-433.

[3]Chen G Y,, A new characterization of,Southeast Asian Bulletin of Math- ematics[J].22(1998):257-263.

[4]Chen G Y,Characterization of , Southeast Asian Bulletin of Mathematics[J].25(2001):389-401.

[5]A.Iranmanesh and S.H. Alavi, A characterization of simple groups,Bulletin of Austral Mathematic Society[J]. 65(2002):211-222.

[6]A.Iranmanesh,S.H.Alavi and B.Khosravi,A characterizati on of,where is an odd prime power, Journal of Pure and Applied Algebra[J].170(2-3)(2002):243-254.

[7]A.Iranmanesh,S.H.Alavi and B.Khosravi, A characterizat ion of for,Acta Math. Sinica(English series)[J].18(3)(2002):463-472.

[8] A. Khosravi and B. Khosravi, A new characterization of , Communications in Algebra[J].32(6)(2004):2325-2339.

[9]A. Khosravi and Behrooz Khosravi, Characterizability of by its order component(s),Rocky Mountain Journal of Mathema tics[J].36(5)(2006):1555-1577.

[10]B. Khosravi and Bahman Khosravi, A characterization of ,Algebras Groups and Geometries[J].19(2)(2002):225-243.

[11]B. Khosravi and Bahman Khosravi, A characterization of,Kumamoto Jour- nal of Mathematics[J].16(2003):1-11.

[12]H.Shi,Z. Han and G. Chen, Can Be Characterized by Its Order Components, Colloquium Mathematicum[J]. 126(2)(2012): 257-268.

[13]Chen,G.Y.,The structure of Frobenius groups and 2-Frobenius groups[J],Journal of Southwest China Normal University(Natural Science Edition),20(5)(1995),485-487.(in Chinese).

[14]Herzog, M., On finite simple groups of order divisible by three primes only[J].Journal of Algebra,10(1968),383-388.

作者简介：

兰林(1998--),单位：四川民族学院数理与统计学院,硕士研究生,职称：助教,研究方向：有限群论。

万琴琴(1998--),单位：四川民族学院数理与统计学院,硕士研究生,职称：助教,研究方向：计算机视觉。

杨润(1985--),单位：四川民族学院数理与统计,硕士研究生,职称：副教授,研究方向：微分动力系统。