

问题牵引下建模方法融合教学案例

——院校保研名额分配及评价方案

闻杰

国防科技大学外国语学院

DOI:10.32629/mef.v9i7.21414

[摘要] 以问题为核心的教学方法,强调学以致用,注重培养学生的逻辑思维能力和解决实际问题的能力,从而使得数学建模课程更贴近现实需求,并更具吸引力。本文探讨问题牵引下建模方法融合的教学案例,主要通过问题设置、问题涉及的基础理论、问题分析及问题求解的实施流程,体现多门课程中知识模块的融合贯通,并最终达成问题解决的闭环效果。

[关键词] 问题牵引; Q值法; AHP法

中图分类号: B01 **文献标识码:** A

Teaching Case of Integrated Modeling Methods under Problem – Driven Approach --Taking College Postgraduate Recommendation Quota Allocation and Evaluation as an Example

Jie Wen

College of International Studies, NUDT

[Abstract] The problem – centered teaching method emphasizes the application of knowledge and focuses on cultivating students' logical thinking ability and practical problem – solving ability. This makes the mathematical modeling course more in line with real – world needs and more attractive. This paper explores the teaching case of integrating modeling methods under the problem – driven approach. It mainly demonstrates the integration and connection of knowledge modules from multiple courses through the processes of problem setting, basic theories involved in the problem, problem analysis, and problem – solving implementation, and finally achieves the closed – loop effect of problem solution.

[Key words] Problem-driven; Q-value method; AHP method

引言

数学建模课程是最能体现“问题是数学的心脏”这一特质的,在课堂中一般会遵循问题导入——理论讲解——程序实现的步骤开展教学及互动,在这一过程中,通过精心设计的问题,引导学员参与到建模的各个环节中,强调学以致用,培养学生的逻辑思维能力和解决实际问题的能力,从而使得数学建模课程更贴近现实需求,激发学习兴趣达成学习效果。本文主要讨论以院校保研名额分配及评价方案设计为牵引的融合教学示例。

1 问题设置

情境牵引整个教学实施,教学者需要精心设置问题,比如在讲授建模方法Q值法和评价方法时,传统教学是分章节分别通过一些小例子进行方法的讲解,那么在问题牵引教学模式,可以将几个方法预设在一个大的问题场景域中,如设置问题如下:

保研名额分配是高等院校选拔优秀毕业生继续深造的重要环节,其公平性与科学性直接关系到学生权益及学科发展,选择合理的方法进行名额分配;确定名额后,在学员个体评价中,平均成绩、体能考核、竞赛经历、骨干经验、学术成果等多维度指标的量化权重与综合评价缺乏统一标准,需要利用相应的方法进行无量纲化处理并最终进行评价。

如某院校共有20个保研名额,毕业学员分属5个专业方向,外国语言文学120人、国际关系50人、外交学30人、遥感技术110人、国家安全学20人,首先确定各专业报名人数;在确定名额后,给定某专业3个保研名额,有8名候选学员,其有5项评价指标:平均成绩、体能考核、参加竞赛及重大活动、骨干经验及学术成果下的数据分别为:

学员D1: 成绩91、体能为特2、参加B类赛一等奖1项、论坛保障任务2次、骨干经验为副排长、学术成果为会议论文2篇;

学员D2: 成绩85、体能为特1、参加校运动会第一名1项、B类赛三等奖1项、骨干经验为指导员、学术成果为会议论文1篇;

学员D3: 成绩87、体能为特2、参加B类赛三等奖2项、骨干经验为排长、学术成果为科技作品二等奖1项;

学员D4: 成绩90、体能为优秀、参加B类赛一二等奖各1项、骨干经验为班长、学术成果为科技作品二等奖1项;

学员D5: 成绩86、体能为优秀、参加B类赛二等奖3项、骨干经验为班长、学术成果为校科技论文节二等奖1篇;

学员D6: 成绩92、体能为特3、参加A类赛二等奖1项、骨干经验为班长、学术成果为发表一般论文1篇;

学员D7: 成绩85、体能为优秀、参加校广播站记者、B类赛三等奖1项、骨干经验为副连长、学术成果为科技作品一等奖1项;

学员D8: 成绩89、体能为特1、参加B类赛二等奖2项、骨干经验为连长、学术成果为发表高质量论文1篇。

需要进一步选择评价方法进行排序, 最终确定保研人员。

2 问题中的基础理论

确定问题后, 通过讨论、提问、分组等多种方式充分调动学员的积极性, 分析和挖掘问题中具体需要解决的子问题, 如上述问题中蕴含了公平席位分配、指标权重的确定、对定性指标进行量化赋值, 消除量纲差异、综合评价等多个子问题, 从而在学员带着问题的情境下开始对方法理论进行讲解, 提升教学效果。

2.1 Q值法

Q值法适用于多主体公平分配问题^[1], 在高校保研、议会席位分配等场景广泛应用, 确保名额分配的数学公平性。其中, 用到的主要的算法为相对不公平度^[2]。

$$q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i + 1)}$$

相对不公平度 q_i 反映了当前分配主体的“人均名额亏缺程度”, q_i 越大, 说明按规模应分配的名额越未被满足, 需优先增补名额。

2.2 AHP法

AHP (Analytical Hierarchy Process)^[3], 即层次分析法, 是由美国运筹学家托马斯·萨蒂(Thomas L. Saaty)提出的一种多准则决策分析方法, 用于解决复杂系统中涉及多目标、多准则的决策问题。其核心原理是将复杂问题分解为目标层、准则层(指标层)、方案层三个层次, 通过两两比较各因素的相对重要性, 计算各层元素的权重, 最终通过综合权重排序实现最优方案的选择, 其具体步骤如下:

(1) 构建多层次递阶结构模型;

(2) 采用Saaty的1-9比较尺度体系对同层次指标间的相对重要性进行两两比较, 构造判断矩阵;

(3) 计算判断矩阵的最大特征根 λ_{max} 及其对应的特征向

量 v , 其中 $n < 3$ 的判断矩阵不用进行一致性检验, 其特征向量 v 可直接视作指标权重 w ;

(4) 对于 $n \geq 3$ 的判断矩阵, 由最大特征根 λ_{max} 计算一致性指标 $CI = (\lambda_{max} - n)/(n - 1)$, 查找平均随机一致性指标 RI , 计算一致性比率 $CR = CI/RI$, 若 $CR < 0.1$, 则判断矩阵通过一致性检验, 其特征向量 v 可视为指标权重 w , 其中平均随机一致性指标 RI 采用Saaty的1977年表;

最后, 结合各指标权重得到综合权重 W , 对整体实施层次总排序并进行总体一致性检验。

3 问题分析及求解

讲解完理论基础后, 最后要实现问题的解决。因此, 需要进一步引导学员开展解决问题的路径的探索: 首先, 结合问题进行分析, 确定方法; 其次, 确定方法, 构建模型后, 需要哪些求解算法; 最后, 通过实践, 是否最终能解决问题, 给出方案。

3.1 问题分析

(1) 名额分配问题分析。5个专业方向的毕业学员人数占总毕业学员人数的比值无法平均分配20个保研名额, 因此不能用传统的比例分配法分配名额, 而Hamilton方法^[4]根据比较各比重小数部分的大小, 将剩余名额分配给小数部分比重最大的专业, 这种方法不能体现公平性。本案例选择Q值法, 先依据各专业人数比例取得保研名额分配的整数部分, 然后通过求各个专业名额分配的相对不公平度, 选择相对不公平度最大的专业分配保研名额, 得出保研名额的分配方案。

(2) 评价问题分析。针对8名学员进行3个保研名额分配, 因此分配过程必须严谨, 如不能用各个学生某一指标成绩的比较比例来参与计算, 也不能使用完全客观的分析方法, 因此, 本案例选择定性定量结合的AHP法确定各指标的综合权重。

依据具体数据建立层次结构模型, 8个学员 D_i 共有5项指

标 U_j , 分别为平时成绩 U_1 、体能考核 U_2 、参加竞赛及重大活动 U_3 、骨干经验 U_4 、学术成果 U_5 , 针对实际情况对这5项指

标构造判断矩阵, 计算判断矩阵的最大特征根 λ_{max} 及其对应的特征向量, 得到各因素对于上一层次某因素的相对重要性排序。为了确保判断矩阵的合理性, 需要进行一致性检验, 若判断

矩阵具有一致性,则特征向量可以表示各指标权重 W_j 。

最后,对各学员的成绩量化和排序。设定各指标总分和赋分标准,归一化后得到学员 D_i 在评价指标 U_j 下的绝对成绩 a_{ij} 。

将成绩 a_{ij} 与各指标权重 W_j 结合,得到各学员的最终成绩 e_i

并确定前三名。

3.2问题求解

(1)公平名额分配。现有20个保研名额,根据各专业人数算出比例,计算各专业初始名额(向下取整):

总人数: $120+50+30+110+20=330$ 人,

外国语言文学: $20 \times (120/330) \approx 7.27 \rightarrow 7$

国际关系: $20 \times (50/330) \approx 3.03 \rightarrow 3$

外交学: $20 \times (30/330) \approx 1.82 \rightarrow 1$

遥感技术: $20 \times (110/330) \approx 6.67 \rightarrow 6$

国家安全学: $20 \times (20/330) \approx 1.21 \rightarrow 1$

得到各专业保研名额的初始分配: 7、3、1、6、1,此时还有两个名额未能分配,需要计算 q_i 进行分配:

外国语言文学: $Q_1 = 120^2 / (7 \times 8) = 257.14$

国际关系: $Q_2 = 50^2 / (3 \times 4) = 208.33$

外交学: $Q_3 = 30^2 / (1 \times 2) = 450.00$

遥感技术: $Q_4 = 110^2 / (6 \times 7) = 285.71$

国家安全学: $Q_5 = 20^2 / (1 \times 2) = 200.00$

外交学专业 Q_3 最大,则第19个名额分配给外交学专业。

此时,外交学的 Q 值发生改变,计算其 Q 值:

$Q_3 = 30^2 / (2 \times 3) = 150.0$,其他专业的 Q 值不变,比较 Q 值大小,进

行第20席的分配,很显然,此时最大 Q_4 ,得出第20个名额应该分给遥感技术专业。

最终,20个保研名额的分配结果为:外国语言文学专业7个,国际关系专业3个,外交学专业2个,遥感技术专业7个,国家安全学专业1个。

(2)评价指标权重。案例进一步需要在已有准备及数据信息下,选取3个保研人员。这是一个评价问题,根据问题背景,我们可以选取AHP法,对评价指标进行两两比较,最终确定权重。

首先,确定评价方案的五个评价指标:平时成绩、体能考核、

参加竞赛及重大活动、骨干经验、学术成果;接下来,对5个指标两两比较,构造判断矩阵。通过专家打分法,综合考量“德、智、体、能、绩”各个方面要求相对于目标层的重要性,并利用Satty的1-9比较尺度对进行确定,得到判断矩阵 U 。

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 10 & 5 \\ 1/2 & 1 & 6 & 6 & 3 \\ 1/10 & 1/6 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/10 & 1/6 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/5 & 1/3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

求解判断矩阵的最大特征根 $\lambda_{\max} = 5.0040$ 及对应的特

征向量 $w = [0.5147, 0.2871, 0.0496, 0.0496, 0.0991]$

再对判断矩阵进行一致性检验

$$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1}, CR = CI / RI$$

通过查表,当 $n=5$ 时,随机一致性指标 $RI=1.12^{[5]}$,得到的一致性比率 $CR=0.0119 < 0.1$,判断矩阵 U 具有一致性,判断矩阵的特征向量可以看作评价方案的权重向量,将近似取整便于计算,得到

$$w = [0.5 \quad 0.3 \quad 0.05 \quad 0.05 \quad 0.1]$$

(3)数据无量纲化处理。在给定的8名同学成绩表中,除了平均成绩 U_1 外,评价指标 $U_2 - U_5$ 皆为非数值型数据,需要进行量化处理。

对体能考核成绩,特1、特2的难度远大于特3;在竞赛和重大活动经历方面,A类竞赛含金量超B类竞赛,校广播站记者和论坛任务保障的经历可以丰富学员眼界;骨干方面,本科学员能担任的最大骨干等级是连长和指导员;在学术成果上,期刊论文的含金量高于会议论文;最终,通过专家决策的方式制定赋分政策:

体能方面:特1=5分、特2=4.5分、特3=3分、优秀=2分;

参赛方面:A类二等=1.3分、论坛保障=1.2分、校广播站=1分、B类一等/校运第一=0.8分、B类二等=0.5分、B类三等=0.4分;

骨干经验方面:连长/指导员=5分、副连长=4分、排长=3分、副排长=2分、班长=1分;

学术成果方面:高质量论文=1.5分、一般论文=1分、科技一等=0.8分、科技二等/会议论文=0.5分;

如上所述,令指标 $U_1 - U_5$ 的最大值为5分,即 U_1 、 U_2 、

U_4 的成绩转化为5分制, U_3 和 U_5 可以累加, 但最大不能超过5分。

(4) 综合评价。结合指标权重及每名同学的表现进行无量纲化处理后的量化值进行加权求和, 如 $D_1 = 4.55 \times 0.5 + 4.5 \times 0.3 + 3.2 \times 0.05 + 2 \times 0.05 + 1 \times 0.1 = 3.985$, 最终得到 $D_1 - D_8$ 的成绩及排名为: $D_8 > D_1 = D_2 > D_3 > D_6 > D_7 > D_4 > D_5$, 保研的三人为 D_1 、 D_2 和 D_8 。

4 结论

综合案例的设计可以将学员在多门课程中学习的知识模块进行贯通, 并达到解决实际问题的效果。本案例覆盖线性代数中的特征值与特征向量, 数学建模课程中Q值法及层次分析法, 案例最终在数学建模课程中实施, 可以将几门课程的内容贯通, 达到融合应用, 提升问题解决能力的教学效果。对于没有数学类基

础课程背景的学员, 从解决问题的角度, 可以适当弱化相关理论, 结合程序进行问题求解, 也鼓励结合MOOC课程资源或AI工具查询不懂的知识点。

[参考文献]

- [1] 姜启源.《数学模型》(第五版)[M].高等教育出版社,2018.
- [2] 丁会,李波.席位分配的平均公平度方法[J].数学的实践与认识,2013(4):138-142.
- [3] 吴孟达.《数学建模教程》[M].高等教育出版社,2011.
- [4] 郭东威,韩艳娜,基于亚当斯公平理论的席位分配法[J].黑龙江大学自然科学学报,2020(02):181-186.
- [5] 司守奎,孙玺菁,《数学建模算法与应用》[M].国防工业出版社,2022.

作者简介:

闻杰(1981—),女,汉族,江苏靖江人,理学硕士,国防科技大学外国语学院,副教授,从事数学教学与量化分析研究。