

培养学生数学发散思维能力, 提高教学效率——以“2024年高考数学新课标 I 卷第16题”的评讲为例

尹锋霖

广东省珠海市麒麟中学

DOI:10.32629/mef.v9i8.21658

[摘要] 本文针对2024年高考数学新课标 I 卷第16题进行专题教学。当年通过对高考学子进行数学答题情况调查,分析并记录了此题失分的具体原因,以此来布置课前分组讨论的问题,课堂展示课前讨论的成果,课后完成变式题,最后每组写一篇关于此题的反思与小结。在教学中引导学生怎样审题,从而培养学生分析问题的能力;在此基础上,指引学生从多个角度来分析题目,做到一题多解、多变的方法,培养学生的发散思维能力,促进核心素养的发展,提高课堂教学的效率。

[关键词] 数学发散思维; 教学效率; 一题多解; 一题多变

中图分类号: G41 **文献标识码:** A

Developing Students' Divergent Thinking Skills in Mathematics and Enhancing Teaching Efficiency — A Case Study of the Analysis of Question 16 from the 2024 National College Entrance Examination (Gaokao) Mathematics Paper I under the New Curriculum Standards

Fenglin Yin

Qilin Middle School, Zhuhai City, Guangdong Province

[Abstract] This paper explores a thematic teaching approach for Question 16 from the 2024 Gaokao Mathematics Paper I under the New Curriculum Standards. For this purpose, the author conducted a survey on the mathematical problem-solving performance of Gaokao candidates, analyzed and documented the specific reasons for scoring errors on this question, thereby designing pre-class group discussion questions; presenting the outcomes of these pre-class discussions during the classroom session; assigning modified variant problems post-class; and finally, having each group write a reflective essay and summary regarding this question. During the teaching process, students are guided on how to carefully analyze the question stem, thereby cultivating their ability to analyze problems; building upon this foundation, students are instructed to approach the problem from multiple perspectives—adopting methods such as "multiple solutions to a single problem" and "various forms of adaptation"—to foster their divergent thinking skills, promote the development of core competencies, and enhance the overall efficiency of classroom instruction.

[Key words] Mathematical divergent thinking; teaching efficiency; multiple solutions to a single problem; multiple variations of a single problem

1 引言

数学是思维的体操,思维是数学的灵魂。数学思维是人们依据一定的规则和原则来解决数学问题,而发散思维是从不同的角度和方向去思考同一个问题,探寻多种方法来解决,并从中找到解决问题的最优解。通过培养学生的数学发散思维能力,能促进学生灵活运用数学知识,发现更多的数学规律和定理,进而提升数学思维能力,促进数学核心素养的发展,提高课堂教学

的效率。

《普通高中数学课程标准解读(2017年版2020年修订)》中指出:“数学教育要引导学生学会用数学的思维思考世界”,“高考命题中应特别关注数学学习过程中思维品质的形成”。在传统习题评讲课堂中,老师往往注重讲题的技巧和规范解答过程,忽视问题的探究过程和方法,不注重学生思维能力的培养,从而导致学生在面临新情境、新问题,由于定势思维的影响而不知所

措。本节课将以“2024年高考数学新课标I卷第16题”的评讲为例,浅析如何培养学生的数学发散思维能力,从而达到提高课堂教学效率的目标。

2 教学过程

2.1 课前准备工作

2024年高考结束后,笔者当年通过对本校参加高考的学生关于数学答题情况进行了问卷调查,并分析了他们各题失分的具体原因,以便于更好地开展今后教学工作。关于第16题解析几何题的失分情况如表1:

表1 第16题学生失分原因分析

知识内容	失分原因	失分比例
椭圆的基本量	a, b, c, e 之间的关系不正确	7.2%
逻辑推理	受思维定势影响,未能建立已知条件间的关联	80.2%
数学运算	计算过程出错或者求不出结果	86.7%
直线的方程	不能由已知选择恰当的设置	91.3%
三角形的面积	没有深入分析	88.9%

由学生对16题的答题情况和表1得出,大部分学生受定势思维的影响,在解题时直接设直线的斜率,联立直线与椭圆的方程,得一元二次方程,运用弦长和点到直线的距离公式,求弦长和三角形的高,但在计算过程中出现计算出错或求不出结果,从而很大程度上影响了后三个大题的解答。因此在课堂教学中,需要引导学生如何分析已知条件彼此之间、与问题之间的关联,帮助学生梳理解题思路,探究多种解题方法,减少计算量。

针对以上问题,提前布置此题作为课前作业,将学生分组并让其讨论以下问题:(1)审题分析,分析已知条件彼此间的关系,探索条件与问题的关联,构建合理的解题方法。(2)题目不能做下去的主要原因是什么?能不能换种解法?本题是否与我们平时做过的题有相似之处。(3)能不能得出解决此类题的解法?(4)从哪些方面可以对此题进行改编。最后每组选出一个同学作为代表,在下节课堂上说讨论的成果。

2.2 课堂活动

例1已知 $A(0,3)$ 和 $P(3, \frac{3}{2})$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

上两点。

(1)求 C 的离心率;(2)若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为9,求 l 的方程。

第(1)问中 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 标准方程是: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$,

不再陈述详细的解题过程,下面重点研究第(2)问。

第1小组:我们这组发现直线 l 过点 $P(3, \frac{3}{2})$, 目的是求它

的方程,由直线的点斜式方程,只要求它的斜率。因此我们直接

对直线的斜率分为存在和不存在两种情况来进行讨论,当斜率不存在时,很容易得出不符合题意;当斜率存在时,令其为 k , 设出直线的点斜式方程,联立椭圆的方程,消去 y 得一元二次方程,

运用弦长和点到直线的距离公式,求弦长 $|PB|$ 和三角形的高,

由三角形的面积得出关于 k 的方程,计算出 k , 最终解决问题。在解题过程中,我们遇到最大的问题是运算能力不过关,如弦长不能正确地用 k 来表示,粗心导致式子化简出错,不会解含有绝对的方程。关于以上问题,我们进行了多次演算才得出正确结果,具体解法如下:

解法1: (i) 当直线的斜率不存在时,

$\therefore$ 直线过点 $P(3, \frac{3}{2})$, $\therefore l$ 的方程为: $x = 3$,

$\therefore |PB| = 3$, 点 A 到直线 l 的距离为 3, $\therefore l$

$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \neq 9$, 不符合题意;

(ii) 当直线 l 的斜率存在时, 设为 k ,

$\therefore k_{PA} = -\frac{1}{2}$, $\therefore k \neq -\frac{1}{2}$, 设 l 的方程为: $y = k(x-3) + \frac{3}{2}$,

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x-3) + \frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases},$$

消去 y 得:

$$(4k^2 + 3)x^2 - (24k^2 - 12k)x + 36k^2 - 36k - 27 = 0,$$

$$\Delta = (24k^2 - 12k)^2 - 4(3 + 4k^2)(36k^2 - 36k - 27) = 36(2k + 3)^2 > 0$$

令 $P(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$x_1 + x_2 = \frac{24k^2 - 12k}{3 + 4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{36k^2 - 36k - 27}{3 + 4k^2},$$

$$|PB| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{6\sqrt{1 + k^2} |2k + 3|}{3 + 4k^2}$$

$\therefore$ 点 A 到直线 l 的距离 $d = \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{k^2 + 1}}$,

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times \frac{6\sqrt{1 + k^2} |2k + 3|}{3 + 4k^2} \times \frac{|3k + \frac{3}{2}|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{3|2k + 3|}{3 + 4k^2} \times |3k + \frac{3}{2}| = 9$$

$$\text{化简得: } |4k^2 + 8k + 3| = 6 + 8k^2,$$

$$\text{解得 } k = \frac{1}{2} \text{ 或 } k = \frac{3}{2}, \text{ 代入判别式检验均符合题意,}$$

因此直线 l 的方程为: $x - 2y = 0$ 或 $3x - 2y - 6 = 0$ 。

点评: 此法属于直线与圆锥曲线问题中的通性通法, 思维量小, 解题思路明确, 在求解过程中, 培养了学生的分类讨论思想, 提高了数学运算能力。但运算繁冗, 涉及到根式、绝对值的运算, 计算量大, 正如第1组的同学所说, 要花很长的时间和多次的演算才能得出正确结果, 但是在考场上, 只有两个小时, 并没有充足的时间来运算, 如何化简计算过程, 减少计算量呢? 接下来请听第2组的解答。

第2小组: 我们这组读完题后, 遇到的问题跟第1小组的相同, 考虑到要联立方程组, 求 Δ , 韦达定理求弦长等, 至少需要30分钟拿下此题。为了解决此问题, 我们开始探究别的解法, 于是对已知条件进行第二次加工, 发现线段 PA 为定值, $S_{\triangle PAB} = 9$, 能计算出点 B 到直线 PA 的距离。目标求直线 PB 的方程, 只需设点 B 的坐标, 再找一个方程, 又由点 B 在椭圆上, 联立方程组, 解出点 B 的坐标, 详细解法如下:

$$\text{解法2: } |AP| = \sqrt{(0-3)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

设点 $B(x_0, y_0)$ 到直线 PA 的距离是 d ,

$$\because S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times |AP| \times d = 9, \therefore d = \frac{12\sqrt{5}}{5},$$

由已知得 $k_{AP} = \frac{3-\frac{3}{2}}{0-3} = -\frac{1}{2}$, 则直线 PA 的方程为:

$$x + 2y - 6 = 0,$$

$$\therefore d = \frac{|x_0 + 2y_0 - 6|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{12\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore |x_0 + 2y_0 - 6| = 12,$$

$$\because \text{点 } B \text{ 在椭圆上, } \therefore \frac{x_0^2}{12} + \frac{y_0^2}{9} = 1, (*)$$

(i) 当 $x_0 + 2y_0 - 6 = 12$ 时, 联立方程(*), 消去 x_0 得:

$$2y_0^2 - 27y_0 + 117 = 0,$$

$$\Delta = 27^2 - 4 \times 2 \times 117 = -207 < 0, \text{ 该方程无解;}$$

(ii) 当 $x_0 + 2y_0 - 6 = -12$ 时, 联立方程(*)消去 x_0

$$\text{得: } 2y_0^2 + 9y_0 + 9 = 0,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

因此直线的方程为: $x - 2y = 0$ 或 $3x - 2y - 6 = 0$ 。

点评: 第2组提供的解法, 通过探索已知条件彼此间的关联, 得出点 B 到直线 PA 的距离, 再结合问题, 探究出解法2。这样处理能将复杂的问题简单化, 讨论过程中培养了学生分析问题和解决问题的能力。

第3小组: 我们这组分析点 B 到直线 PA 的距离为定值时, 遇到的问题是: 直接设点的坐标, 或用参数来表示点的坐标, 都避免不了大量的运算。此时我们联想到点到一个定点的距离为定值时, 它的轨迹是一个圆。当点到一条定直线的距离为定值, 它的轨迹又会是什么? 通过作图分析, 得出点 B 的轨迹是直线 PA 的平行线与椭圆的交点, 再求出交点坐标, 利用两点式得出直线的方程, 具体解法如下:

解法3: 从解法2中, 知直线 PA 的方程为: $x + 2y - 6 = 0$

得出点 B 在与直线 PA 平行且距离为 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ 的直线 m 上,

设 m 的方程为: $x + 2y + t = 0 (t \neq -6)$, 根据平行直线间的距离公式:

$$\frac{|t+6|}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}, \text{ 解得 } t = 6 \text{ 或 } t = -18,$$

(i) 当 $t = -18$ 时, 结合图象, 直线 m 与椭圆无交点, 不符合题意;

(ii) 当 $t = 6$ 时, 直线 m 与 PA 关于原点对称, m 与椭圆相交的点为 B ,

即 $B(0, -3)$ 或 $B(-3, -\frac{3}{2})$, 因此直线 l 的方程为:

$$x - 2y = 0 \text{ 或 } 3x - 2y - 6 = 0.$$

点评: 该组同学运用类比的思想, 将知识点进行迁移。如由点到定点的距离为定值, 联想到点到定直线的距离为定值的轨迹, 利用图形的对称性, 直接得出点 B 的坐标, 避免解方程组, 降低了计算量, 从而找到解决问题的最优方案。一题多解在解题过程中, 可以训练学生的发散思维能力, 在教学过程中, 采用一题多解, 探索最优解的训练, 可引导学生从多方向、多角度思考同一个问题, 探究解决问题的最佳方法。

第4小组: 我们这组主要讨论如何改编试题, 得出变式。通过阅读近5年高考卷和教材, 发现2023年天津高考卷的第18题与此题是同类型题, 2022年的甲卷也考了求直线的方程, 教材《人教A版选择性必修》第一册第145页的第7题与此题类似等。我们

得出高考题虽然年年在变化,但是与最近几年的高考题和教材例题、习题有着很大的关联,解法也有相同之处。在教师的引导下,我们探讨如何从特殊到一般化,概括出其本质特征和发展规律。我们将从改变已知条件、改变结论、交换条件和结论、更换试题背景等得出第(2)问的一些变式。

变式1 已知 $A(0,3)$ 和 $P(3,\frac{3}{2})$ 为椭圆 C :

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上两点,若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B ,且

$\triangle ABP$ 的面积为 $\frac{9}{2}$,求 l 的方程。

变式2 已知 $A(0,3)$ 和 $P(3,\frac{3}{2})$ 为椭圆 C :

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上两点,若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B ,求

$\triangle ABP$ 面积的最大值,以及对应直线 l 的。

变式3 已知 $A(0,3)$ 和 $P(3,\frac{3}{2})$ 为椭圆 C : $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$

上两点,若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B ,当这样的直线有且只有两条时,求 $\triangle ABP$ 面积的取值范围。

变式4 已知 $A(0,3)$ 和 $P(3,\frac{3}{2})$ 为椭圆 C : $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$

上两点,若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B ,当 B 落在第二象限时,求 $\triangle ABP$ 面积的取值范围。

变式5 已知 $A(0,3)$ 和 $P(0,3)$ 为椭圆 C :

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上两点,若直线 $l: 3x - 2y - 6 = 0$ 交曲线 C

于点 D 和 E ,求 $\triangle ADE$ 的面积。

变式6 已知圆心为 C 的圆,经过点 $A(0,3)$, $B(3,0)$, $P(\sqrt{5}, 2)$ 三点。

(1)求圆 C 的标准方程;

(2)若过 P 的直线 l 交 C 于点 Q ,且 $\triangle APQ$ 的面积为 $3\sqrt{5}$,求直线 l 的方程。

经过讨论后,我们组认为解决这类问题的方法是认真审题,

挖掘已知条件所隐藏的结论,如图形特征、是否有定值定点、基本定理等,从不同角度、方向来分析所得结论与所求问题之间的关联,从而找到试题的最优解法。

点评:直线与圆锥曲线的问题是历年高考的重点和热点,解题的关键是数形结合。如直线经过一个点求方程时,利用点斜式和两点式来求解;求三角形的面积范围时,引入一个合理的参数,将面积的范围转变成求这个参数的取值范围。

3 总结

在数学教学中,课堂教学质量起着关键性的作用,因此教师需不断地研究如何提高课堂教学的效率。本节课,从一道得分较低的高考入手,课前分组讨论布置的问题,课堂让每个小组展示课前讨论的成果,课后让每组合作完成变式题,交流解题的方法和结果,最后每个小组写一篇关于此题的反思与小结。

整个教学流程,引导学生怎样审题、构建解题思路、总结规律和知识的灵活应用,学生在合作探究过程中,掌握基本知识、基本技能。通过引导学生如何从不同角度、方向来分析同一个问题,得出一题多解、一题多变等,培养学生的发散思维能力,从而有效地提高了课堂教学效率。最终促进学生数学学科核心素养的发展,让他们慢慢掌握“会用数学眼光观察世界;会用数学思维思考世界;会用数学语言表达世界”。

【参考文献】

[1]普通高中数学课程标准解读(2017年版2020年修订)[M].高等教育出版社,2020.

[2]刘辉.纵览全局,思维创新——以2024年新课标 I 卷15,16题为例[J].教学考试,2024(38).

[3]章建跃,李增沪.普通高中教科书《数学》(选择性必修第一册)[M].人民教育出版社,2020.

[4]周贝妮.善用“一题多解”鼓励“多想少算”——以2024年高考数学新课标 I 卷第16题为例[J].中学数学教学参考,2025(27):79-81.

[5]李刚.用“问题链”设计促进学生的深度学习——以2024年高考数学新课标 I 卷第16题的解法探究为例[J].数学通报,2025(5).

[6]邱志定.2024年高考数学新课标 I 卷第16题的深度剖析和教学思考[J].数学教学通讯,2024(27).

作者简介:

尹锋霖(1989--),女,汉族,湖南省邵东市人,硕士研究生;中学一级;从事高中数学教学。