

一道数学试题引发的思考

刘日升

泰和中学

DOI:10.32629/mef.v9i8.21687

[摘要] 高中函数与导数中,在给定区间上存在单调递减子区间的题目,由于与“区间上单调递减”的表述很相似,很容易导致学生把二者等同起来而出错。本文以三次函数 $f(x)=x^3-3ax+1$ 为载体,分析由“恒成立”误判和“能成立”端点疏漏造成的两种错误,从参变分离、补集转化、数形结合、单调性定义四个方面给出严谨的解答,并通过导函数图像对称轴的位置来说明判别点随着区间位置的变化而变化的规律。分析可知,该类问题实际上是存在性判断,可以统一化归为导函数在区间上最小值的符号判定;所提炼出的通性通法在各种区间变式中保持稳定,对于发展逻辑推理和直观想象素养有可迁移的示范作用。

[关键词] 导数; 单调区间; 存在性问题; 数形结合

中图分类号: G4 **文献标识码:** A

Reflections sparked by a math problem

Risheng Liu

Taihe Middle School

[Abstract] In high school calculus courses on functions and derivatives, problems involving the existence of monotonic decreasing subintervals within a given interval often lead to errors due to similarity with the concept of "monotonic decrease over an interval." Using the cubic function $f(x) = x^3 - 3ax + 1$ as a model, this paper analyzes two common types of errors: misinterpretations stemming from assumptions about "constant validity" and oversight regarding "potential validity at endpoints." A rigorous solution is provided through four approaches—variable separation, complement set transformation, numerical–visual integration, and application of monotonicity definitions—with the position of the derivative's graph symmetry axis illustrating how the critical point varies with interval parameters. The analysis demonstrates that such problems essentially involve existence judgments, which can be uniformly reduced to determining the sign of the derivative's minimum value over intervals. The derived general methodology remains applicable across various interval variations and serves as a transferable tool for enhancing logical reasoning and intuitive visualization skills.

[Key words] derivative; monotonic interval; existence problem; integration of numerical and graphical methods

1 引言

函数、导数是高中数学的重点内容,又是逻辑推理、直观想象能力的培养点^[1]。用导函数符号来判断单调性看似程序化,但是当它被嵌入到“存在”“恰好”这些限定语当中时,概念的边界就变得微妙起来。一道求解存在递减子区间参数范围的试题,正好可以反映出学生对于存在性与恒成立之间认知的盲区,值得深入剖析。

2 问题溯源与典型错误的成因剖析

2.1 试题呈现与概念指向

研究的原型是课堂测验题,设函数 $f(x)=x^3-3ax+1$,在开区间

$(1, 3)$ 内有单调递减的子区间,则实数 a 的取值范围为。对它求导得 $f'(x)=3x^2-3a$,关键是看导函数能否取到负值。教材把导函数在某区间上恒非正和函数在该区间上单调递减联系起来,学生已经非常熟悉,但是这种熟稔却成了迁移偏差的原因^[2]。本题所问是“存在递减区间”,即能在 $(1, 3)$ 内找到一个子区间,使得函数值下降,等价于存在某个 $x \in (1, 3)$ 使 $f'(x) < 0$,而不是要求整个区间处处为负;命题只需要导函数在区间内某处变号为负,而不需要处处为负。两种表述的量词一个为“存在”,一个为“任意”,逻辑强度完全不同,这就是全部混淆的根源。教学过程中如果在读题时把量词标清楚,“存在递减区间”和“区间上单调递减”

并列比较,学生在动笔之前就会意识到两者之间的差别;辨清命题类型比熟练运算更重要,它决定着整道题的求解方向。

2.2 “恒成立”误判的逻辑根源

第一类错误将“存在递减区间”误认为“在 $(1, 3)$ 上单调递减”,从而要求 $f'(x)=3x^2-3a \leq 0$ 对区间内的每一个点都成立,得到 $a \geq x^2$ 恒成立,取右端上确界9,答案写成 $[9, +\infty)$ 。此解运算无误,病根在把存在性命题升格为全称命题,递减子区间只需占据 $(1, 3)$ 的一部分,不一定铺满整个区间,强求处处递减就人为抬高了门槛。将它同真解相比较,就可以知道, $[9, +\infty)$ 只是正确解集 $(1, +\infty)$ 的真子集,介于1和9之间大量的参数被错误地排除在外。该反例说明错误不是出现在导数计算或者不等式变形上,而是出在命题类型上,如果量词出现错误,后面步骤越是严密,偏离正确的答案就越远,量词的识别要放在运算之前。

2.3 “能成立”边界的处理疏漏

第二类错解的方向正确,抓住了 $f'(x) < 0$ 在 $(1, 3)$ 上有解这个主要矛盾,但是在端点取舍上出错。若把条件松写为 $3x^2-3a \leq 0$ 有解,得 $a \geq 1$,答案给成 $[1, +\infty)$,其中 $a=1$ 恰不合题意。将 $a=1$ 回代, $f'(x)=3(x^2-1)$,在 $(1, 3)$ 上恒为正,函数单调递增,根本无递减子区间,故须剔除端点,真解为 $(1, +\infty)$ ^[3]。这说明,在处理存在性问题的时候,“ $<$ ”和“ $\leq$ ”的取舍不能停留在符号的操作上,原不等式 $f'(x) < 0$ 是严格的不等式,参变分离之后随手写成非严格的形式,就会把使导函数取零而不是取负的临界参数错误地包括进去。凡等号处的临界参数,都应回代原命题逐一检验,确认其确实可以产生递减子区间之后方可保留,方能避免无效端点混入解集中。两类错解并置有意味,前者范围太小,后者范围太大,方向相反却都源于对“存在”量词把握不够准确,让学生在自我诊断中亲身经历概念的澄清,往往比直接给出标准解法的印象更深。

3 基于“存在性”命题的多元求解路径

3.1 参变分离与最值转化

明确命题实质之后,最直接的方法就是参变分离。由“存在 $x \in (1, 3)$ 使 $3x^2-3a < 0$ ”整理得 $a > x^2$ 在 $(1, 3)$ 上有解。含参不等式有解的量化含义非常清楚,参数只要大于右端函数在该区间上的下确界就可以。 $g(x)=x^2$ 在开区间 $(1, 3)$ 上是单调递增的,下确界为1(当 x 趋近于1时逼近却不可达),因此条件化为 $a > 1$,解集 $(1, +\infty)$,端点开放正与前面剔除 $a=1$ 互相印证。不妨点明其对照原理,以便举一反三:对于不等式 $a > h(x)$,有解对应 a 大于 $h(x)$ 的下确界,恒成立对应大于上确界;对于不等式 $a < h(x)$,两种量词下的判据则互换为上确界和下确界。学生只要记住存在型看一个方向的最值、恒成立型看另一个方向的最值,在纷繁的题面中就可以快速地找到正确的方向,不会像前文一样因为量词而失足。存在与恒成立的分野,最后都归结到最值方向的一次选择上。参变分离把“对于某个 x 成立”翻译成参数和函数最值的关系,使得含参讨论一步到位,省去了二次不等式判别式和根的分布展开的繁琐讨论,是解决一元含参存在性问题最具有普适性的途径之一。

3.2 补集思想的逆向求解

正面分支太多的时候,逆向思考就更简捷了。“在 $(1, 3)$ 上存在递减子区间”的反面是“找不到任何递减子区间”。首先需要明确一个前提,该三次函数在区间上不可能退化成常值函数,所以对立面就是“恒单调递增”,即 $f'(x)=3x^2-3a \geq 0$ 对区间内每一个点都成立,得 $a \leq x^2$ 恒成立,取右端下确界1,对应 $(-\infty, 1]$ 。原问题的解集就是它在实数范围内的补集 $(1, +\infty)$ 。补集思想把不能一一列举的“存在”一下子变成可以统一处理的“任意”,正面求解要考察递减子区间可能落在哪里,反面只需处理一个恒成立不等式,运算量大大减少。值得指出的是,补集法和参变分离法得到的中间集合 $a \leq 1$ 和 $a > 1$ 互相补集、铺满实轴且无重叠,互相印证了运算的正确性,并让学生直观地体会到“存在”和“对立面的任意”在集合意义上的严格互补。

3.3 数形结合的几何直观

把不等式关系投影到图像上,抽象的存在性就一目了然。令 $g(x)=x^2$,再加入水平直线 $y=a$,那么“ $a > x^2$ 在 $(1, 3)$ 上有解”等价于这条线能高于抛物线 $g(x)$ 在 $(1, 3)$ 上的最低点;因为其最低点无限接近纵坐标1,只要 a 大于1,水平线就一定会和抛物线下方区域相交,结论仍然为 $(1, +\infty)$ ^[4]。换一个角度,直接考察导函数抛物线 $f'(x)=3x^2-3a$,在 $(1, 3)$ 上取负值,即其在该区间内取到的最小值小于0,为后面利用对称轴来确定最小值做好铺垫。数形结合用“高低相交”直观代替逐项代数论证,把符号运算转化为可以看见的位置关系,特别适合于培养学生的直观想象素养,也方便中等程度的学生形成稳定的存在性认识。把参数当作可以上下移动的水平线,就是处理一大类含参问题的通用视角,它把“有无解”这样的逻辑判断转变为“两条曲线能否相交”这样可视的问题。

3.4 单调性定义的本源回归

前述路径各具巧思,仍应回到单调性定义验明其可靠。设函数在某子区间 $(m, n) \subset (1, 3)$ 上递减,任取 $x_1 < x_2$,作差分解得 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3a)$ 。因为 $x_2-x_1 > 0$,所以括号内的因式为负,即 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2 < 3a$ 可以成立;当 x_1, x_2 趋于同一个点 x_0 时,左边趋于 $3x_0^2$,仍然归结为存在 x_0 使得 $a > x_0^2$,因此 $a > 1$,与导数法完全一致。定义法虽然稍繁,但是从最根本的地方证明了各个途径殊途同归,把“作差定号”和“导数定号”打通,使学生明白导数不是凭空而来的规则,是差商在极限意义下的自然结果,有利于巩固概念基础,防止机械套用。

4 变式拓展与教学价值的延伸

4.1 区间位置决定判别点的选取

掌握本题的钥匙在于导函数抛物线 $f'(x)=3x^2-3a$ 的对称轴恒为 $x=0$,开口向上。存在 $f'(x) < 0$ 等价于导函数在给定区间上最小值小于0,最小值位置由区间相对对称轴决定,判别点随之改变。开口向上的抛物线,在闭区间上最小值或者在离对称轴最近的端点,或者在对称轴对应的顶点,这就是统摄全部变式的主线。原题 $(1, 3)$ 整体位于对称轴右侧,导函数单调递增,最小值在左端点处,令 $f'(1)=3-3a < 0$ 得到 $a > 1$,这是原题取左端点的原因。

区间平移为 $(2, 4)$ 仍在轴右侧, 由 $f'(2)=12-3a<0$ 得 $a>4$, 解集 $(4, +\infty)$ 。改为 $(-1, 3)$ 则跨越对称轴, 最小值转由顶点 $x=0$ 提供, 令 $f'(0)=-3a<0$ 得 $a>0$, 解集 $(0, +\infty)$, 此时若仍代入端点便会失真。再变为 $(-4, -2)$, 整体落在轴左侧, 导函数单调递减, 最小值改由右端点承担, 令 $f'(-2)=12-3a<0$ 得 $a>4$, 解集同为 $(4, +\infty)$ 。四种情况下判别点从左端点、顶点到右端点的规律是被区间和对称轴的相对位置所决定的。可见, “令端点处导数小于零”不是放之四海而皆准的口号, 只有先判断区间和对称轴的相对位置, 再确定区间上导函数的最小值, 才能避免张冠李戴, 这也是变式训练不可忽视的深层含义^[5]。综上所述, 在轴右取左端点、轴左取右端点、跨越对称轴取顶点, 三种情况一以贯之, 学生可以从容应对区间位置的任意变化。

4.2 通性通法的提炼与教学启示

将上述个案抽象为统一模型, “区间上存在 $f'(x)<0$ ”当且仅当“区间上 $f'(x)$ 的最小值小于0”, 再通过参变分离得到参数大于分离函数的下确界。因此在教学中可以引导学生按照四步走的原则, 即第一步辨别命题是否存在或恒成立, 第二步将含参不等式分离变量后转化为最值比较, 第三步根据区间和对称轴的位置确定最小值所在的区间, 第四步回到原命题验证临界端点的取舍。这一辨命题、分参数、定最值、验端点的过程可以迁移到含参恒成立、能成立甚至恰成立的很多题型中, 学生掌握了之后遇到同类的新题目就可以按图索骥, 不再需要零散的记忆。四条求解途径分别指向代数变形、逆向思维、几何直观和定义本源, 正好对应逻辑推理和直观想象素养的不同方面, 一题多解由此上升为一类通解。就课堂实施来说, 可以将其设计成一节专题探究课, 先让学生独立作答出两类高频错误, 再组织对错题的集体诊断, 然后从四个角度分别求解、相互印证, 最后用区间变式收束到统一判据, 把纠错、建构和提炼融合在一起, 比单纯的讲授标准解法更能在学生的心中留下深刻牢固的方法印记, 其教学效益远远大于单个题目的本身。

5 结束语

一道看似简单的求参问题, 实际上是存在性命题和全称命题之间的分野。学生两种错误的解法, 一是范围收得太小, 二是放得太大, 两者相反却都源于对“存在”量词把握不准。将存在递减子区间的证明还原为导函数最小值符号判定, 再用抛物线对称轴位置准确找到判别点, 零散的解题技巧就变成了稳定的、可以迁移的通性通法。以一题多解为载体, 带动一类通解, 使学生在辨命题、分参数、定最值、验端点的完整链条中反复淬炼, 既可修补概念的裂隙, 又可沉淀方法的自觉, 是提高数学思维品质、落实核心素养的一条务实而有效的途径。学生学会在动笔前问“这是存在还是恒成立”, 在得数后问“端点是否需要检验”, 那么他们得到的就不仅仅是这一道题的答案, 而是可以带出的面对同类问题时稳定的思维习惯。

[参考文献]

- [1] 罗新兵, 刘再平.《普通高中数学课程标准日常修订版(2017年版2025年修订)》教学与评价案例的研究与启示[J]. 中学数学月刊, 2026, (6): 12-16.
- [2] 陈杰. 如何避免因忽视函数的定义域导致错解[J]. 语数外学习(高中版下旬), 2025, (4): 51-52.
- [3] 王雨颖. 高阶思维视域下高中数学变式教学实践研究——以“一元二次不等式恒成立问题”为例[J]. 中学数学月刊, 2026, (3): 43-46.
- [4] 马忠平. 数形结合思想方法在高中数学教学中的应用探析[J]. 智力, 2024, (9): 37-39+43.
- [5] 王淳. 从一道题的一题多解看函数零点赋值策略[J]. 考试周刊, 2019, (A5): 91-92.

作者简介:

刘日升(1982--), 男, 汉族, 江西吉安人, 本科, 中小学一级教师, 研究方向: 高中数学教学, 高中数学解题方法和技巧。