现代教育论坛
第 4 卷◆第 11 期◆版本 1.0◆2021 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

论发散思维在高等数学教学中的应用

吕勇　余雷
苏州大学机电工程学院

DOI:10.12238/mef.v4i11.4243

[摘　要] 随着高校新工科的建设，高等数学等基础课程需要改变传统的集中思维的教学方式，使学生能够从不同的角度解决问题。本文通过在高数教学中引入发散思维，并通过导数求解、极限求解以及隐函数的求解等三个具体实例进行探讨，从而提高学生举一反三、融会贯通的学习能力。

[关键词] 发散思维；高等数学；隐函数
中图分类号：G642　　文献标识码：A

The Application of Divergent Thinking in Higher Mathematics Teaching

LYU Yong, YU Lei
School of Mechanical and Electrical Engineering, Soochow University

[Abstract] With the construction of new engineering courses in colleges and universities, basic courses such as advanced mathematics need to change the traditional teaching mode of concentrated thinking, so that students can solve problems from different perspectives. This paper introduces divergent thinking into advanced mathematics teaching, and discusses it through three concrete examples of derivative solution, limit solution and implicit function solution, so as to improve students' learning ability.

[Key words] divergent thinking; advanced mathematics; implicit function

我国于2006年启动工程教育认证试点，2013年加入国际工程教育《华盛顿协议》组织，这是我国高等教育的重大突破。2017年，苏州大学机电工程学院电气工程及其自动化专业顺利通过中国工程教育专业认证，同时也是教育部卓越工程师教育培养计划专业、江苏省一流本科专业以及苏州大学一流本科专业。在此基础上，同时基于作者在“高等数学”多年的教学经验，围绕应用型、创新型人才培养的需要，对该课程提出了改进措施，同时引入发散思维，提出了一种基于发散思维的解题方法，从而提高了学生利用高等数学解决实际问题的能力。

1 课程特点

“高等数学”是工科院校的必修基础公共课，也是学习专业课的前提，不仅可以培养大学生的逻辑思维能力，而且可以提高大学生的综合素质。高等数学具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性，其中极限的运算、无穷变量、一元以及多元微积分学和无穷级数构成了主要难点。其中，各个知识点环环相扣并相互渗透，而微积分的内容最为系统并且在专业课程中有及其广泛的应用。

想学好高等数学，需要从以下几点入手：第一理解基础概念，弄清楚其本质；第二掌握重要的定理，必须的情况下可以尝试自己进行推导，同时要搞清楚定理的使用范围；第三在理解例题的基础上能够举一反三，并善于总结方法；第四理清脉络，以全局的眼光对知识进行串联，采用发散的思维去解决问题，而不要仅限于某一种方法。

2 教学过程中的实际应用

2.1导数的求解

导数是微积分学中一个非常重要的概念，在具体求解时可以结合三角公式灵活求解。举例如下：当$y=\cos x\sin x$，求$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$的值，大部分学生会直接对$y$直接求导，具体过程如下：

$$y'=-\sin x\cdot\sin x+\cos x\cdot\cos x \quad (1)$$

在公式（1）中代入$\frac{\pi}{4}$，可求得结果为0。

换一种思路，可以根据倍角关系先对y进行变换，即$y=\frac{1}{2}\sin 2x$，在此基础上对y进行求导：

$$y'=\cos 2x \quad (2)$$

在公式（2）中代入$\frac{\pi}{4}$，同样可求得结果为0。

2.2极限的求解

在高数中，极限的重要性毋庸置疑，当求极限的函数比较复杂时，我们往往利用诺必达法则进行求解。很多学

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

生在掌握后续知识以后，往往会忽悠知识的综合应用。举例如下：求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$，通过观察分母和分子，当x趋于0时，分母和分子都为0，因此满足诺必达法则使用的基本条件，推导过程如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}}{-\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}-\frac{8}{9}x^2(1+x^2)^{-\frac{5}{3}}}{-\cos x} \quad (3)$$

当分子和分母的极限不为0时，代入x的值可以求出最终极限为-2/3。

虽然诺必达法则可以求解，但求导过程复杂，学生容易出错，因此可以考虑结合等价无穷小。在公式（3）中的第二步根据 $x\to 0$，可以将 $\sin x$ 等价为 x，并与分子中 x 的约分，从而可以快速求解。如果学生对等价无穷小比较熟悉，可以直接在第一步采用，根据 $(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$ 以及 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，可以直接得到如下公式再求解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3} \quad (4)$$

通过对比以上三种解法，我们发现第三种看似简单，实质要求对等价无穷小的变换公式非常熟练。因此我们可以将诺必达法则与等价无穷小结合使用，即可以利用诺必达法则的优势，同时只要掌握等价无穷小的常用变换关系即可，也就是上述方法二。在教学过程中，我们鼓励学生一题多解，发散思维，不要仅仅局限于得到正确的解答，从而充分发挥自己的主观能动性。

2.3隐函数的求导

高数中的隐函数因无法直接求导，给学生的理解带来一定的困难，从一元到二元隐函数的扩展进一步增加了难度。因此学生应该勇于尝试，在理解导数的基础上，结合二元隐函数的求导公式以及微分等方法解决遇到的问题。下面通过一个具体的隐函数求导来讲解不同方法的应用，举例如下：设 $x^2+y-e^z=4z$，分别求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

第一种方法可以直接进行求导，把z看成是关于x，y的函数，两边同时对x求导可得 $2x-e^z\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial x}$，从而解出，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{e^z+4}$ 同理可以解出 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e^z+4}$；第二种方法利用二元隐函数的求导公式，我们将x, y和z看成独立的变量，并令 $F(x,y,z)=x^2+y-e^z-4z$，在此基础上分别求偏导数，则有 $F_x=2x, F_y=1, F_z=-e^z-4$，因此可以求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{2x}{e^z+4},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_y}=\frac{1}{e^z+4};$$

为了进一步拓展学生的思维，我们继续研究如何采用微分法解决上述问题，首先对方程两边求全微分，并利用全微分公式 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 直接得到结果，计算过程如下：首先 $d(x^2+y-e^z)=d(4z)$，然后得到 $2xdx+dy-e^zdz=4dz$，进一步整理可得 $dz=\frac{2x}{e^z+4}dx+\frac{1}{e^z+4}dy$，即 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{e^z+4}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e^z+4}$。

通过上述几个典型的例子，我们可以充分感受到发散思维在高数解题中的魅力，其不仅可以帮助学生理解知识点前后的衔接，而且可以帮助学生搞清楚高数中比较重要和难懂的知识点。

3 结语

在高等数学教学中，适当选用一些发散思维的题型有助于开阔学生眼界，创造出新的思路和解法。特别地，发散思维不仅可以应用在高等数学的学习中，还可以在更多的课程教学中进行尝试。引入发散思维可以极大地激发学生学习高等数学的热情和积极性，优化教学方法，充分锻炼学生的学习能力。随着新工科的不断发展，发散思维的引入可以让学生不再拘泥于固化的想法，提升其创造力，成为适应新形势的创造性人才。

基金项目：

教育部卓越工程师计划项目-电气工程及其自动化；苏州大学一流本科专业项目-电气工程及其自动化；江苏省高等教育教改研究课题(2021JSJG394)。

[参考文献]

[1]韩晓燕,张彦通,王伟.高等工程教育专业认证研究综述[J].高等工程教育研究,2006(6):6-10.

[2]同济大学数学系.高等数学[M].高等教学出版社,2001.

[3]李晓瑾.浅谈高等数学中信息化教学的改革[J].经贸实践,2017(16):310.

[4]袁素平.发散思维在数学中的应用[J].科学咨询(教育科研),2004(08):37.

[5]胡庆华.浅谈一题多解在培养高职学生数学能力的作用[J].教育现代化,2019,6(21):201-203.

[6]周黎.问题驱动式教学模式在高等数学教学中的应用[J].西部素质教育,2018(4):161-162.

作者简介：

吕勇（1983--），男，汉族，江苏泰州人，讲师，硕士，研究方向：自动化技术、计算机视觉等。