现代教育论坛
Modern Education Forum
第7卷◆第7期◆版本 1.0◆2024年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

解析几何课程思政元素挖掘

姜德烁　刘双花
百色学院 数理科学与统计学院
DOI:10.12238/mef.v7i7.8703

[摘　要] 从解析几何形成的历史背景、坐标系的诞生、在实际问题中的应用、知识的前后联系以及蕴涵的数学思想等方面较为深入地挖掘了课程中的一些思政元素,为读者及相关的教学活动提供一些可参考的素材。
[关键词] 课程思政；解析几何；变量数学；应用；数形结合
中图分类号：G622.3　文献标识码：A

Mining Ideological and Political Elements in Analytic Geometry Course

Deshuo Jiang　Shuanghua Liu
School of Mathematics, Physics and Statistics, Baise University
[Abstract] This paper explores some ideological and political elements in the course from the historical background of analytic geometry, the birth of coordinate system, its application in practical problems, the context of knowledge and the mathematical ideas contained in it, so as to provide some reference materials for readers and related teaching activities.
[Key word] Curriculum ideology and politics; Analytic geometry; Variable mathematics; Application; Number−shape combination

引言

教育的目的,一方面是知识的传承,另一方面则是立德树人。作为教育的主阵地和主力军,学校与教师不但要向学生传授中华民族以及世界各文明千百年来传承下来的科学理论与知识,还要承担育人责任。学生是祖国的花朵和未来,承担着建设社会主义和实现中华民族伟大复兴的重要使命。培养学生树立正确的人生观、价值观、世界观,让学生健康成长是教育的一个重要使命,课程思政则是实现这一目的的有效方式之一。

解析几何的建立,在数学发展史上是具有重要意义的一个事件。它被认为是变量数学发展的第一个决定性步骤,第一次真正实现了几何方法与代数方法的结合,使形与数统一起来,并且对于微积分的诞生有着不可估量的作用。解析几何是大学数学专业一门重要的基础课程,是后续许多课程(如数学分析、微分几何等)进一步学习的基础,也是教师资格证考试、研究生入学考试的重要考核科目。因此,该课程的学习对于学生知识体系的完善、思维能力的培养及后续的进一步发展都有着重要的作用。本文,我们将对此作一些力所能及的探讨,为今后的教学提供参考。

1 课程背景

解析几何的诞生,伴随着常量数学到变量数学的转变。它是变量数学形成的第一个决定性步骤。在17世纪以前的相当长一段时期(公元前六世纪—公元十七世纪初),人们对数学的研究局限于初等数学、常量数学的范畴。这一时期的研究所涉及的量通常是不变的,即常量,如矩形的面积、球的体积、物体的质量等。常量数学描述的通常是静态物体的数量特征,其研究内容与成果构成现代中学数学的主要内容,并逐渐形成了初等数学的主要分支,如算术、几何、代数。但我们知道,物体是运动的,如何描述或刻画运动物体的特征,则对数学提出了更高的要求。到15、16世纪,伴随着地理大发现而兴起的航海热潮、资本主义工业的发展以及天文探索、军事等方面的需求,对数学提出了一些迫切需要解答的问题。而这些问题,大多都与运动有关,如非匀速运动物体的轨迹(行星绕日运动、抛射物体的运动轨迹)；变速运动物体的速度、加速度、路程；曲线在一点的切线；变量的极值；不规则图形的面积、体积等。对这些问题的深入研究,最终导致了变量数学的形成,而解析几何则是其中的第一个决定性步骤。

由此可见,解析几何的产生,有着深刻的时代背景和迫切的社会需求。对该类问题的适当介绍有利于学生对课程形成一个全面的认识,了解其在数学发展史中的地位与作用,认识到课程与实际问题的密切联系,从而激发学生学习的兴趣与求知欲。因此相关的背景知识成为解析几何课程思政一个重要的着力点,其中的人物、问题及各学者的成就、贡献等都是宝贵的素材。

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

2 坐标系的诞生与解析几何的创立者笛卡尔

在解析几何中，一个根本性的概念就是坐标系。有了坐标，点与有序数组之间就建立了一一对应的关系，进而在图形与方程之间建立起联系，使得几何问题可以用代数的方法来研究，一定程度上大大降低了几何问题处理中的难度。而坐标系的产生，又有着一个有趣的故事。

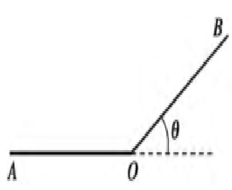
说到解析几何，不得不提的一个数学家就是笛卡尔。他是解析几何的创始人，也可以说是解析几何之父。笛卡尔在创建解析几何中的主要贡献之一就是发明了坐标系。一天，笛卡尔在床上躺着休息，看到屋顶角上的一只蜘蛛正在拉网，于是想到了正在思考的问题，即如何把几何图形的点与满足方程的一组数联系起来。他把蜘蛛看作一个点，这个点可以上下左右移动，而蜘蛛的每一个位置可以用一组数来确定。实际上，他发现屋子里相邻的两面墙和地面交出了三条线，因此把墙角作为起点，把交出来的三条线作为三根数轴，从而空间中的每一点和三根数轴上有顺序的三个数之间就可以建立起一一对应的关系。在此基础之上，笛卡尔发明了平面和空间直角坐标系，进而创建了解析几何。

笛卡尔的经历告诉我们，生活中处处有学问。只要我们保持敏锐的意识，勤观察，善于思考，总会有收获的。

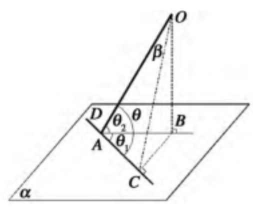
3 解析几何在实际问题中的应用

数学是一门理论性比较强的学科，但它并不是无源之水、无根之木。数学中的许多问题，以及数学的许多分支学科都来源于人类的生产实践活动或与其密切相关。我们熟悉的解析几何课程也不例外。

解析几何源于笛卡尔等数学家的开创性工作，其思想是把几何问题转化为代数问题，不但可以处理几何中的一些复杂问题，而且在机械制造、工程技术等领域都有广泛的应用。如在输油管道的设计中，由于输油路线往往会穿越一些河流、山谷，或者需绕过人口稠密的城市、沼泽地、山脉等，故管道有时就会有一定程度的弯曲。这样的管道，可能是平面弯管，也可能是空间弯管。但不管哪种形式的弯管，都会涉及到角度的问题。当管道只在某一平面内弯曲时，则用到平面角（如图一）；而当管道在空间中弯曲时，则会用到空间角（如图二）。这样的角，在几何中有类似的概念，即方向角。



图一 弯管平面角



图二 弯管空间角

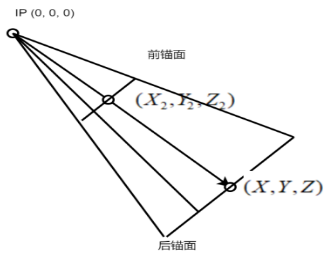
类似地，在悬索桥锚固系统定位中，解析几何同样可以起到重要的作用。如文中，作者研究了虎门二桥大沙水道桥东锚碇锚固系统。在计算后锚面槽口底面中心定位点坐标时，是先计算前锚面索股中心点坐标（可求），再根据该坐标及后锚面距IP点（即为所取坐标系原点）的距离计算后锚面槽口中心点坐标。这里所用到的工具即为解析几何中的定比分点坐标公式。实际上，前锚面上各索股中心点与后锚面各索股中心点共线，故可采用定比分点的坐标计算公式进行计算。如沿某一索股方向，前锚面索股中心点坐标为 $(24,-3,4.4)$，IP点（即原点）坐标为 $(0,0,0)$，求后锚面锚固槽口中心定位点坐标 (X,Y,Z)。在预设条件下，假设后锚面距IP点44m，槽口中心定位点距后锚面0.12m，则可知后锚面槽口中心定位点坐标 $X=44-0.12=43.88$ m。进一步，确定比分点坐标公式：

$$X=(X_1+\lambda X_2)/(1+\lambda) \tag{1}$$

$$Y=(Y_1+\lambda Y_2)/(1+\lambda) \tag{2}$$

$$Z=(Z_1+\lambda Z_2)/(1+\lambda) \tag{3}$$

即可求出槽口中心定位点坐标 Y、Z。上述公式中，(X_1,Y_1,Z_1) 为IP点坐标，即 $(0,0,0)$；(X_2,Y_2,Z_2) 为前锚面索股中心点坐标。首先，把 X、X_1、X_2 各自的值代入(1)式中，可求得定比 λ 的值。再把 Y_1、Y_2 及 λ 的值代入(2)式可求得坐标 Y。同理，把 Z_1、Z_2 及 λ 的值代入(2)式可求得坐标 Z。



图三 锚面索股中心点坐标示意图

另外，在绘制倾斜结构面的地质图时，也可以运用解析几何的方法。

类似的问题有很多。在实际的教学中，如果我们能把相关概念或知识点与这样的实际问题联系起来，相信学生的学习兴趣和热情会很高，自然地学习主动性和效率也会提升。

4 课程中知识的前后联系

在曲面的方程这部分内容中，教材上有一些例题，以此说明如何从曲面的特征性质出发得出曲面的方程。其中的一个例题是：求平行于 xOz 平面，在 y 轴正向一侧，并且与 xOz 平面的距离为 k 的平面方程。这样的平面，它上面点的特征性质其实就是这些点的 y 坐标为 k，故该平面的方程为 $y=k$。再进一步的分析可以发现，这个题目实际上是要求与一个坐标平面平行的平面方程。这类平面，本题中的情形是一类，但不仅仅是这一类，还有其它一些情形。如，

(1) 与 xOz 平面平行, 在 y 轴负向一侧, 并且与 xOz 平面的距离为 k , 这也是一类平面, 它们的方程为 $y=-k$ 。

(2) 与 xOy 平面平行, 在 z 轴正向一侧, 并且与 xOy 平面的距离为 k , 此类平面的方程为 $z=k$ ；

(3) 与 xOy 平面平行, 在 z 轴负向一侧, 并且与 xOy 平面的距离为 k , 此类平面的方程为 $z=-k$ ；

(4) 与 yOz 平面平行, 在 x 轴正向一侧, 并且与 yOz 平面的距离为 k , 此类平面的方程为 $x=k$ ；

(5) 与 yOz 平面平行, 在 x 轴负向一侧, 并且与 yOz 平面的距离为 k , 此类平面的方程为 $x=-k$ 。

经过进一步拓展延伸, 可以得到上述六类平面的方程。这样不但极大拓展了知识的范围, 而且对后面第四章内容的学习也有很大的帮助。我们知道, 要研究椭球面、双曲面、抛物面等等这些二次曲面的性质与形状, 一种非常重要而且有效的方法就是平行截割法。平行截割法的思想就是用一组平行平面去截要考察的这个曲面, 通过观察截口的形状和性质来得到所要考察图形的形状与性质。而这里要取的平面, 通常是与某一坐标平面平行的一组平面。因此, 这类平面的方程就是必须要掌握的一个知识点！如果在第二章学习时把这类平面的方程弄清楚了, 再学习第四章相关内容时就会减少许多阻碍。否则, 在讲述第四章时要重新讲解此类问题, 不但占去了不少时间, 而且过多的新知识点(尤其是不是很容易理解、掌握的知识点)的集中处理会给学生带来不小的压力, 学习效果也不会太好！

由此可以看到, 教材中的知识不是孤立的, 前后之间有着密切的联系。每一节的知识既是前面知识的推广与延伸, 也是后续内容学习的基础。人生何尝不是如此！我们的每一步, 既是前面工作与付出积累的结果, 也是后面更进一步的阶梯或者说铺垫, 只有把当前的这一步走好, 才能为后面的发展打下坚实的基础。所以, 我们要脚踏实地, 扎扎实实地往前走！要清楚每一步之间的因果关系！

5 课程中蕴涵的思想、方法(以数形结合为例)

在解析几何课程中, 涉及到的典型思想是转化。它是通过建立坐标系, 把几何的问题转化为代数的问题, 利用代数的方法去解决, 这是我们所熟悉的。除此之外, 还有其它的一些方法, 如数形结合。

几何中的问题, 相对来说都比较抽象, 需要较好的空间想象能力。而由于学生所处的阶段, 此类问题处理起来并不是那么容易。数形结合思想则提供了一个较好的途径。通过把所给问题中的点、线、面及其它要素汇聚在一个图形中, 使我们对所讨论问题有更清晰的认识和更全面的把握。如下例

例 1 求与平面 $\tilde{\pi}: x-y+z=7$ 垂直并通过直线 $l: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-8}{2}=\dfrac{z-11}{3}$ 的平面方程。

分析这类问题看似简单, 但从实际情况来看, 部分学生(尤其是初学者)对这类题目的解答还是存在一定的问题, 主要的原因在于对题目中的图形不能较好地进行想象, 不能把线、面等要素结合起来作为一个整体去看。造成这一现象的原因, 一方面是心理上的, 看到题目就感觉比较难, 不敢去做, 不愿去想；另一方面就是不会灵活运用所学知识去分析问题(这需要一定的空间想象能力)。像这样的题目, 如果借助数形结合法, 把相关的点、线、面放在一个图形中, 则可以较好地解决(或迎刃而解)。

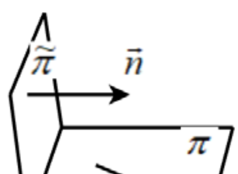
本题中, 要求平面的方程, 通常的方法有两种。

(1) 找出平面上的一个点, 和平面的一对方位向量, 即可求出平面的方程(点位式方程)；

(2) 找出平面上的一个点, 和平面的一个法向量, 也可以求出平面的方程(点法式方程)。

由于要求的平面(不妨设为 π) 通过一条直线 l , 而 l 通过点 $(0,8,11)$, 故平面 π 也通过这一点。那下面的问题就变成了寻找平面的方位向量(或法向量)。

直线 l 的一个方向向量为 $\vec{v}=\{-1,2,3\}$, 故 $\vec{v}$ 与 l 平行, 从而与 π 平行。又, $\tilde{\pi}$ 与 π 垂直, 故 $\tilde{\pi}$ 的法向量 $\vec{n}$ 与 π 平行(此时, 把图形画出来即可看得非常清楚明了了)。由此, $\vec{v}$ 与 $\vec{n}$ 均与 π 平行。再验证一下, 这两个向量是否共线, 如果不共线即可作为所求平面 π 的一对方位向量(如下图四)。



图四 平面的方位向量

以下是解答过程。

解 设所求平面为 π 。由已知, 直线 l 通过点 $(0,8,11)$, 且其方向向量 $\vec{v}=\{-1,2,3\}$ 与 π 平行。又 π 与平面

$x-y+z=7$ 垂直，故 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$ 与 π 平行。

由于与不共线，故为平面的一对方位向量。于是平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y-8 & z-11 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0，即 5x+4y-z-21=0。$$

6 结语

综上所述，解析几何课程所蕴含的思想、方法与知识，以及在解析几何的创建过程中作出重要贡献的数学家的成长经历，是课程思政的宝贵素材，为课程思政的实施提供了有力的支撑。以上是我们在实际工作中的一些想法、总结与探索，不足之处敬请指正！

[基金项目]

百色学院2023年度校级教改项目(2023JG70)；广西高等教育本科教学改革工程项目(2022JGZ165；2023JGB361)。

[参考文献]

[1]杨成，秦红艳，刘治毅，等.空间解析几何法在输油管道工程中的应用[J].现代化工,2017,37(2):214-216.

[2]吕林根，许子道.解析几何[M].高等教育出版社,2019.

[3]李家辉.空间解析几何在悬索桥锚固系统定位中的应用[J].地理空间信息,2018,16(2):114-116+12.

[4]刘悦忠.解析几何法在倾斜结构面地质图编制中的应用[J].贵州地质,2000(3):196-199.

[5]季凯.解析法在河道护岸过渡段施工测量中的应用[J].工程建设与设计,2019(12):141-146.

作者简介：

姜德烁(1980--)，男，汉族，山东济宁人，博士，讲师，微分几何。