第 7 卷◆第 12 期◆版本 1.0◆2024 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

探秘波利亚解题理论在圆锥曲线教学中的应用

——以 2024 年新高考全国一卷数学第 16 题为例

贺俊勇　杨雪花　张海湘　陶驷玖　罗瑶
湖南工业大学理学院
DOI:10.12238/mef.v7i12.9758

[摘　要] 圆锥曲线是几何与代数的综合,同时也是高中数学的重难点内容.波利亚的解题理论为学生提供了解题思路,也为教师提供了解题教学的方法,本文通过研究波利亚“解题四部曲”：理解题目、拟定方案、执行方案和回顾,演绎2024年新高考全国一卷数学第16题的解题方法和步骤,提出了三条解题教学建议：解题前寻求切入点、解题时突破计算点、解题后聚焦反思点,以提高学生的解题能力,培养学生的数学思维,提升教师的解题教学质量,为一线教师教学提供参考。
[关键词] 波利亚；高中数学；圆锥曲线
中图分类号：G623.5　文献标识码：A

Exploring the application of Polya's problem-solving theory in teaching conic sections

--Take question 16 of the first volume of the 2024 National college Entrance Examination as an example

Junyong He　Xuehua Yang　Haixiang Zhang　Sijiu Tao　Yao Luo
School of Science, Hunan University of Technology

[Abstract] Conic curve is a synthesis of geometry and algebra, as well as the key and difficult content of high school mathematics. Poly problem solving theory provides students with the problem solving ideas, also provides teachers with the problem solving teaching method, this paper through the study of wave "problem solving tetralogy": understanding topic, formulate scheme, execution plan and review, in 2024 the new national college entrance examination a volume of mathematics 16 problem solving methods and steps, put forward three problem solving teaching Suggestions: problem solving before the breakthrough point, focus after the problem solving, in order to improve the students 'ability of problem solving problem solving, cultivate students' mathematical thinking, improve teachers 'problem solving teaching quality, provide reference for a first line of teachers' teaching.
[Key words] Polia; high school math; conic curve

引言

“一个好的解法是如何想出来的？”乔治·波利亚(George Polya)给出了答案。乔治·波利亚是美国著名的数学家和数学教育家,他长期从事数学教育工作,对数学解题有深入研究。经过不断地实践、验证与完善,他将自己的解题思想凝练为一张“怎样解题表”。波利亚的解题思想为学生解题提供了极大的帮助,同时也对教师进行解题教学具有指导意义。

圆锥曲线是解析几何中的重点内容,是几何与代数的综合,同时也是高中数学的重难点内容。其考查形式通常以几何背景呈现,要求学生具备数形结合思想,广泛的数学专业知识、良好的数学思维以及强大的计算能力等。然而,由于圆锥曲线问题难度大,学生对于这部分的知识掌握度又不够,故而不少学生面对此类问题时会产生畏难心理,这都不利于学生的解题能力的提高。

鉴于此,本文以2024年新高考全国一卷数学第16题为例,探讨波利亚解题思想在高中数学教学中的应用,旨在促使学生养成良好的解题习惯,提高学生的解题能力,培养学生的数学思维。

1 探秘波利亚“解题四部曲”理论基础

波利亚“怎样解题表”将解题过程分为四个阶段：理解题目,拟定方案、执行方案、回顾[1]。这四个阶段都是非常重要的,在解题过程中,如果忽视了某个阶段,往往会对解题产生阻碍作用。同时,他又在每一阶段设置了一系列启发性问题以打开学生的思路。下面分别对这四个阶段进行阐述：

现代教育论坛
Modern Education Forum
第 7 卷◆第 12 期◆版本 1.0◆2024 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

首先,理解题目。理解题目是解题的第一步,理解题目又分为熟悉题目阶段和深入理解题目阶段。在熟悉题目阶段要暂时抛开细节,使整个问题形象化,为重新回忆起一些相关问题做好准备。在深入理解题目阶段需要将题目的未知量、已知量和条件分离出来,逐个分析,并通过不同的组合方式来考虑问题。

其次,拟定方案。拟定方案是问题解决的核心。观察未知量,尽量想出一道熟悉的具有类似未知量的题目。通过回忆之前学习过的相关知识和技能,对比新问题与旧问题的区别与联系,找到类似问题的解题方法,并将此方法尝试应用于新问题,逐步拟定解决方案。

再次,执行方案。在拟定方案之后就要执行方案。在这个阶段解题者需要运用数学运算、逻辑推理和直观想象等数学素养,严谨地书写解题过程,仔细检查每一步是否正确,这样才能确保最终结果的正确性。

最后,回顾。回顾是对解题活动的检验与完善,也是解题过程中容易被忽视的过程。通过对解题过程检查和解题方法的总结,反思在解题过程中遇到的困难,尝试利用不同的方法来求论证结果的正确性,考虑不同解题方法的优劣性、适用性,寻求最优解,以形成自己的解题经验,最终实现解题能力的提高。

2 探秘波利亚“解题四部曲”在教学实践中的应用

题目：已知A(0,1)和P(3,1.5)为椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）上两点。

(1)求C的离心率。

(2)若过P的直线l交C于另一点B,且△ABP的面积为9,求l的方程。

2.1第一阶段：理解题目

问题1此题的未知量是什么？

未知是椭圆C的离心率以及直线l的方程。

问题2已知量是什么？

已经知道点A(0,1)和P(3,1.5)的坐标和△ABP的面积为9。

问题3联系未知量与已知量的条件是什么？

点A和点P都在椭圆C上,过点P的直线l交C与另一点B。

问题4条件是否足以确定未知量？

条件是充分的,已知椭圆上两点的坐标就能求出椭圆C的方程,从而求出离心率。根据△ABP的面积为9就能确定B点的位置,从而得到直线l的方程。

2.2第二阶段：拟定方案

问题5是否见过类似的题目？它的解题思路是怎样的呢？

高考源于教材,但高于教材。联想到在新人教A版高中数学选择性必修一第一册第145页的综合运用有这样的一个问题,如图1所示。这题的解题思路为首先设出P点的坐标,已知P点在椭圆上且已知PF_2的斜率,通过这两个条件可以建立二元一次方程组,从而解出P的点的坐标,以F_1F_2为底,P点的纵坐标为高,三角形PF_1F_2的面积可以用底乘高除以2来计算。所以本题的解法可以从这个问题中受到一些启发。

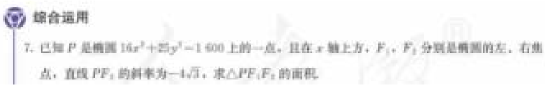
综合运用
7. 已知P是椭圆$16x^2+25y^2=1\,600$上的一点，且在x轴上方，F_1，F_2分别是椭圆的左、右焦点，直线PF_2的斜率为$-4\sqrt{3}$，求$\triangle PF_1F_2$的面积.

图1 新人教A版高中数学选择性必修一习题

问题6用怎样的方式来解决这个问题？

①将点A(0,1)和P(3,1.5)代入到椭圆C方程中构建方程组,求出a,b,c的值,进而得出椭圆C的离心率。

②已知直线l过P(3,1.5),要求直线l的方程还需知晓斜率k。题目中已知△ABP的面积为9,最容易想到的就是三角形的面积等于底乘高除以2。在本题中可以将PB看作底,点A到直线l的距离看作高.因此需要设出直线 l的方程,直接联立直线方程与椭圆方程进行消元,再根据弦长公式求出PB,利用点到直线距离公式求出高,最终构建出一个关于直线斜率k的方程,从而得出直线l的方程。

2.3第三阶段：执行方案

待解决的问题一：求椭圆c的离心率

将点A(0,1),P(3,1.5)代入椭圆C的方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中,得到$a^2=12$，$b^2=9$，$c^2=3$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

待解决的问题二：求直线l的方程

由(1)知,椭圆C的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$，当直线l的斜率不存在时,直线l的方程为$x=3$，易知此时B(3,-1.5),点A到直线PB的距离为3,则$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$，与已知矛盾；

当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y-\frac{3}{2}=k(x-3)$，即$y=k(x-3)+\frac{3}{2}$，

设$P(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}y=k(x\text{-}3)+\frac{3}{2}\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$，消去y整理可得,

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

$$(4k^2+3)x^2-(24k^2-12k)x+36k^2-36k-27=0$$

则 $x_1+x_2=\dfrac{24k^2-12k}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{36k^2-36k\text{-}27}{4k^2+3}$，

由弦长公式可得,

$$|PB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}$$

$$\cdot\sqrt{(\frac{24k^2-12k}{4k^2+3})^2-4\times\frac{36k^2-36k-27}{4k^2+3}}=\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}$$

又点A到直线l的距离

$$\frac{1}{2}\times\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}\times\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}=9$$，解

得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{2}$，则直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$ 或

$y=\frac{3}{2}x-3$.

2.4第四阶段：回顾

根据最终结果计算△ABP面积,完全符合题意,即每一步的推理是有效的,演算是准确的。

此题考察了椭圆的方程、离心率的定义、直线方程的表示方法,点到直线距离公式,弦长公式,三角形的面积求法以及方程思想。不仅需要学生具有一定的数学运算素养,还考察了学生逻辑推理以及知识综合应用的能力。

3 波利亚解题教学启示

3.1解题前寻求切入点

能否正确、迅速解题,关键在于正确理解题目的内涵与条件。在解题教学过程中,教师要帮助学生理解题目,引导学生认真审题,让学生意识到审题的重要性。只有正确审题,才能弄清楚题目的未知量、已知条件和要求,形成正确的解题思路,有效地找到题目的切入点。一方面,教师要培养学生审题能力。教师可以引导学生利用不同的数学语言对数学问题进行表征,从不同的角度来理解问题。例如,圆锥曲线问题通常以数学文字表征的形式呈现,这就可以让学生运用数学符号和数学图像的形式来叙述问题,分别从代数与几何的角度来思考问题,这不仅能让学生充分理解题目,还能让学生快速地找到合适的解题方法。另一方面,教师要增强学生审题的信心。圆锥曲线问题难度较大,学生往往会产生畏难情绪,这对问题的解决具有一定的阻碍作用。教师可以引导学生从基础题开始,由易到难,由浅入深,逐步增强学生的信心。

3.2解题时突破计算点

数学是思维的科学。如今的解析几何考查的不仅仅是学生的计算能力,更注重学生综合思维能力。在解决圆锥曲线问题的过程中,计算的复杂程度会因解题思路不同而有所差异[2]。例如在此次圆锥曲线的试题中本文提供了直接法、几何法和三角换元法三种方法来求解问题,但每个方法的显现的计算量却大相径庭。因此,在教学过程中,透彻理解算理和熟练掌握算法是提高学生计算能力的重要保障.在考场上学生时间是有限的,在不清楚算理和算法的前提下就进行数学运算,往往会使运算陷入僵局.在进行数学运算之前,教师要先引导学生明确算理,在此基础上选择恰当的方法,这样才能有效提高学生的运算能力,促进学生数学运算素养的发展。

3.3解题后聚焦反思点

在获得问题答案之后,回顾反思往往容易被忽视,然而这一环节却是必不可少的。这正如波利亚所说,“数学问题的解决仅仅只是一半,更重要的是解题后进行回顾”。通过重新思考解题方法以及结果,不仅可以帮助学生加深数学知识结构和关系的理解,还可以帮助学生用不同的方法来解决问题,寻求题目的最优解[3]。在解题后教师要善于引导学生进行以下三方面的回顾与反思：一是解题过程及结论的合理性与正确性进行检验。二是试题中所涉及到的知识点,进一步强化学生对数学知识的理解和应用.三是试题中蕴含的数学思想和方法,从不同的角度思考问题,让学生学会举一反三,以培养学生的发散思维和创新意识,提高学生的数学核心素养。需要注意的是,教师要抓住反思契机,趁着学生在头脑中有清晰的体验,让学生及时进行反思,实现效果的最大化。

4 总结

本文以2024年新高考全国数学一卷第16题为例,探析了波利亚“怎样解题表”在高中圆锥曲线教学中的运用。通过研究波利亚的“解题四部曲”和案例分析,得出了三条教学建议：在解题前寻求切入点、解题时突破计算点和解题后聚焦反思点。波利亚的解题理论倡导的是一种启发式教学,其解题思想能够为学生的数学解题提供清晰的思路,发展学生的数学思维。因此,在日常解题教学中,教师要有目的、有意识地引导学生,灵活运用波利亚解题理论的思想进行解题,启发学生思维,从而提高学生的解题效率。

[参考文献]

[1]G·波利亚.怎样解题[M].上海:上海科技教育出版社,2011.

[2]黄金明.活用代数方法巧用几何特征——解析几何优化运算的思考与实践[J].数学教学通讯,2022,(18):53-55.

[3]孙祥雨.“回顾、反思”有助于提高学生数学能力[J].中学数学,2020,(19):20-21+23.

作者简介：

贺俊勇(2000--),男,湖南郴州人,硕士研究生,研究方向：数学教学论。