

# 一种基于 scale 的提前终止迭代策略的极化码

## ——BP 译码算法

刘军旗

河北科技工程职业技术大学

DOI:10.12238/acair.v2i2.7402

**[摘要]** 基于提前终止迭代策略的极化码改进BP译码算法主要利用信息比特的似然比,观察信息比特的似然比的变化值与收敛阈值的大小,判断信息比特是否收敛,当所有信息比特都达到收敛时,停止迭代。这一算法降低了迭代次数,但在每一次迭代时,需要判断所有信息比特,无疑增加了空间复杂度和时间复杂度。仿真表明,每个信息比特的停止译码时,其平均迭代次数是不一致的,迭代次数均值在整体上有递增趋势;整体的收敛情况,通过判断部分信息比特收敛即可。本文提出一种基于scale的提前终止迭代译码算法,本质是判断部分信息比特,这部分信息比特数量相当于信息比特总数乘以scale因子,当这部分信息比特收敛的时候,整体译码终止。仿真结果表明,与提前终止迭代策略的极化码改进BP译码算法相比,性能没有下降,译码空间复杂度减少了 $O((1-\alpha) * K)$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 其中(K为信息比特个数)。

**[关键词]** 极化码; BP译码; scale因子; 提前终止迭代

中图分类号: TN762 文献标识码: A

### An Early stopping Iteration Strategy Based on scale

#### ——Belief Propagation Algorithm for Polar Codes

Junqi Liu

Hebei Vocational University of Technology and Engineering

**[Abstract]** The improved BP decoding algorithm for polar codes based on early stopping iteration strategy mainly utilizes the likelihood ratio of information bits, observes the change value of the likelihood ratio of information bits and the size of the convergence threshold, and determines whether the information bits have converged. When all information bits have reached convergence, the iteration is stopped. This algorithm reduces the number of iterations, but at each iteration, it is necessary to determine all information bits, which undoubtedly increases spatial and temporal complexity. Simulation shows that the average number of iterations for each information bit is inconsistent when decoding is stopped, and the average number of iterations shows an increasing trend overall; The overall convergence situation can be determined by judging the convergence of some information bits. This article proposes a scale based early stopping iterative decoding algorithm, which essentially judges some information bits. The number of these information bits is equivalent to the total number of information bits multiplied by the scale factor. When these information bits converge, the overall decoding is terminated. The simulation results show that compared with the polar codes improved BP decoding algorithm with early stopping iteration strategy, the performance does not decrease, and the decoding space complexity is reduced (where K is the number of information bits).

**[Key words]** polar codes; BP decoding; Scale factor; Early stopping of iteration

## 1 简介

极化码<sup>[1]</sup>具有以较低的编译码复杂度达到香农限的能力,得到持续关注和创新。为了说明极化码的性能,Arıkan给出了第

一个译码算法——连续消除译码算法<sup>[1]</sup>,即SC。之后,文献<sup>[2][3][4]</sup>又提出了一些改进的SC译码算法。由于SC译码算法的本质,以上提出的算法都有较高的译码延迟以及较低的输出等缺点,因此,

在实际生活中的应用受到了影响。

BP译码算法是一种并行译码算法,它被应用在了Polar码上,引起人们极大的关注。然而,由于该算法使用大量的迭代次数,在迭代译码过程中,大量的计算不可避免,使得计算复杂度较高;至此,我们需要降低译码复杂度,来改善BP译码算法。文献[5]提出了一种提前终止迭代的改进BP译码策略,通过比较信息比特的似然比变化值与收敛阈值的大小,判断信息比特是否收敛,当所有的信息比特都达到收敛时,停止迭代。但是该算法有一个显著的缺点,通过判断码字中所有信息比特的迭代情况,来决定是否终止译码。本文提出了一种改进的算法,在译码过程中,不再通过判断所有信息比特,而是通过部分信息比特收敛与否,决定译码终止与否。通过仿真可知,该改进算法的译码性能没有降低,同时,时间和空间上的复杂度,大大降低。

### 2 基于scale的提前终止迭代BP译码算法

在提前终止迭代的Polar改进BP译码算法<sup>[5]</sup>中,算法是基于因子图(因子图如图2.2所示)的,通过判断所有信息比特的似然比信息,当相邻两次似然比变化均值满足小于收敛阈值时,译码终止。

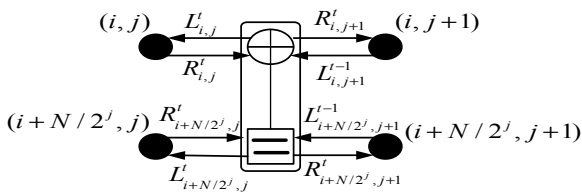


图2.1 处理单元

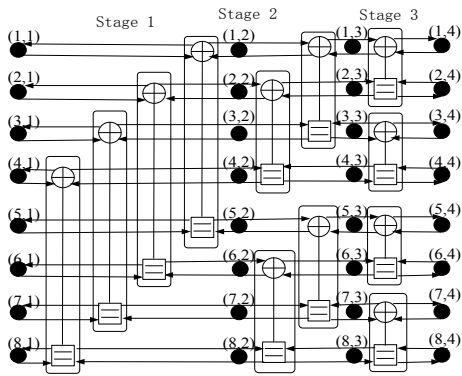


图2.2 因子图

在极化码中,采取提前终止迭代译码算法,每个信息比特停止译码时,需要译码迭代次数是不同的,为了分析极化码所有信息比特停止译码平均迭代次数情况。采用仿真分析码长为512、1024,不同信噪比的情况下,统计如表2.1,2.2所示。

从表2.1和表2.2的数据中,我们可以观察到:在同一信噪比条件下,前半段信息比特的平均迭代次数普遍低于后半段;同时,随着信噪比的提升,无论是前半段还是后半段,其平均迭代次数均呈现减少的趋势。所有信息比特达到停止迭代的译码次数在整体上呈递增的趋势。因此,可以通过判断后半段的信息比特是否达到译码的终止条件,代替判断所有信息比特是否达到译码

的终止条件,上述表中前半段与后半段比例是0.5,实际中这个比例scale可以通过仿真得到。

表2.1 码长512前后半段迭代次数平均值

$E_b/N_0$	Avger iterations (f)	Avger iterations (b)
1	25.9833	35.4896
1.5	22.1487	25.8803
2	15.6967	16.6536
2.5	11.5904	11.7295
3	9.3426	9.3402
3.5	8.4778	8.4543

表2.2 码长1024前后半段迭代次数平均值

$E_b/N_0$	Avger iterations (f)	Avger iterations (b)
1	20.2525	27.7341
1.5	20.2525	27.7341
2	15.1230	17.6044
2.5	11.6639	12.2588
3	9.8149	9.9452
3.5	8.9313	8.9742

本文提出基于scale的提前终止迭代BP译码算法,通过判断需要较大迭代次数的这部分信息比特,当这部分信息比特满足收敛条件(2-2)时,停止译码。与提前终止迭代的BP译码算法相比:计算复杂度方面,计算量减少,平均迭代次数两者基本持平。

$$\begin{aligned}
 L_{i,j}^t &= g(L_{i,j+1}^{t-1}, L_{i+N/2^j,j+1}^{t-1} + R_{i+N/2^j,j}^t) \\
 L_{i+N/2^j,j}^t &= L_{i+N/2^j,j+1}^{t-1} + g(L_{i,j+1}^{t-1}, R_{i,j}^t) \\
 R_{i,j+1}^t &= g(L_{i+N/2^j,j}^{t-1} + R_{i+N/2^j,j}^t, R_{i,j}^t) \\
 R_{i+N/2^j,j+1}^t &= R_{i+N/2^j,j}^t + g(L_{i,j+1}^{t-1}, R_{i,j}^t)
 \end{aligned} \tag{2-1}$$

其中,  $g(x, y) = \log((1 + xy) / (x + y))$

在基于scale的提前终止迭代BP译码算法中,我们定义了以下符号。

定义3.1:

$T_{\max}$ : 预设迭代次数最大值。

$t$ : 迭代次数变量,  $\{t | 0 \leq t \leq T_{\max}, t \in Z\}$ 。

$i$ : 位于因子图中的行,  $\{i | 1 \leq i \leq N, i \in Z\}$ 。

$j$ : 位于因子图中的列,  $\{j | 1 \leq j \leq m + 1, j \in Z\}$ 。

$L_{i,j}^t$ : 位于因子图 $(i, j)$ 的结点,在 $t$ 次迭代的左信息。

$R'_{i,j}$ : 与  $L'_{i,j}$  类似, 代表位于因子图  $(i, j)$  结点的右信息。

$k$ : 对信息比特计数,  $\{k | 0 \leq k \leq K, k \in Z\}$ 。

$\mathcal{E}$ : 收敛阈值, 仿真获得。

$\lambda$ : scale因子, 仿真获得。

$\overline{E}(x)$ : 变量  $x$  的均值

$\hat{u}_i$ : 码字中第  $i$  比特的硬判结果。

$r$ : 信道接收端矢量, 第  $n$  分量用  $r_n$  表示。

$L_c$ : 信道可靠度。

$$\overline{E} = \frac{|L'_{i,j} - L^{t-1}_{i,j}| + |L^{t+1}_{i,j} - L^t_{i,j}|}{2} \leq \mathcal{E} \quad (2-2)$$

$$k \leq \lambda * K \quad (2-3)$$

对于  $(N, K)$  带有参数的极化码, 基于scale的提前终止迭代BP译码算法的执行步骤如下:

步骤1: 初始化因子图中结点  $(i, 1)$  的右信息  $R'_{i,1}$ , 如果该结点是信息比特, 初始化0, 否则赋值负无穷; 初始化位于因子图  $(i, m+1)$  结点关联的左信息,  $L'_{i,m+1} = L_c * r_i$ ; 初始化scale因子  $\lambda = 0.5$ 。

步骤2: 以PE(如图2.1所示)为基本单位, 根据公式(2-1), 先更新左信息, 再更新右信息。

步骤3: 判断位于因子图  $(i, 1)((1-\lambda) * N \leq i \leq N)$  的信息比特是否满足收敛条件(2-2)式, 若满足, 停止该信息比特的信息更新, 并更新  $k = k + 1$ ; 否则按照步骤2继续更新结点信息。

步骤4: 判断(2-3)式是否成立, 若成立, 转至步骤5; 否则停止迭代。

步骤5: 判断表达式  $t \leq T_{\max}$  是否为真, 若真, 更新  $t = t + 1$ , 转到步骤2; 否则停止迭代, 转至步骤6。

步骤6: 硬判决, 如果  $L'_{i,1} > 0$ ,  $\hat{u}_i = 1$ , 否则  $\hat{u}_i = 0$ 。

基于上述的译码算法步骤, 我们现在对算法的复杂度进行深入分析。这种分析主要从两个维度展开: 空间复杂度和时间复杂度。上述算法的改进主要基于空间复杂度的改进, 直觉上时间复杂度会减少一些。对于参数  $(N, K)$  的极化码, 空间复杂度分析如下。

从空间复杂度的视角来看, 该算法是在标准BP译码的基础上构建的。极化码的BP译码过程依赖于因子图, 极化码的BP译码是基于因子图。因子图有  $N * (m+1)(m = \log_2 N)$  个结点, 基于scale的提前终止迭代译码算法是在极化码的因子图第一阶段的信息比特做出判断, 因此需要  $3 * \lambda * K$  个浮点数存储空间连续三次迭代似然比信息, 同时通过记录  $\lambda * K$  个信息比特的收敛与否, 来判断该信息比特是否达到收敛, 因此需要  $\lambda * K$  个布尔型数据空间。综上所述, 该算法的空间复杂度为  $N * (m+1) + 3 * \lambda * K + \lambda * K (0 < \lambda < 1)$ 。

表格2.3列出算法: 标准BP译码算法、基于提前终止迭代的BP译码算法、基于scale的提前终止迭代BP译码算法, 三种算法在空间复杂度上比较。

表2.3 BP译码与改进BP译码空间复杂度对比

算法	标准 BP 译码	提前终止迭代 BP 译码	基于 scale 的提前终止迭代 BP 译码
空间复杂度	$N * (m+1)$	$N * (m+1) + 3 * K + K$	$N * (m+1) + 3 * \lambda * K + \lambda * K$

### 3 仿真结果与分析

#### 3.1 仿真参数设置

本文通过仿真的结果去对比对极化码的标准BP译码方法、基于提前终止迭代的BP译码算法、基于scale提前终止迭代改进BP译码算法。我们采用了Arikan的极化码构造方法, 并在二进制擦除信道(BEC)上进行了测试。编码译码过程中, 信号首先经过调制, 调制采用BPSK方式, 最后通过高斯白噪声信道传递码子。

仿真过程中, 采用的参数以及值如下:

码长  $N$ : 512, 1024, 2048

码率  $R$ : 0.5

最大迭代次数:  $T_{\max}$ : 60

收敛阈值  $\mathcal{E}$ : 0.01

scale因子  $\lambda$ : 0.5

误比特率BER: 衡量译码准确率

平均迭代次数: 衡量译码复杂度。

#### 3.2 仿真结果分析

图3(a)所示为参数(512, 256)的极化码, 在标准BP译码算法、基于提前终止迭代的BP译码算法、基于scale的提前终止迭代改进BP译码算法下误比特率曲线, 性能没有损失, 平均迭代次数大大减少, 在信噪比3dB时, 平均迭代次数大约减少了80%, 随着信噪比的增加, 平均迭代次数逐渐减少, 最终趋于平稳。基本的提前终止迭代BP译码算法和基于scale的提前终止迭代BP译码算法, 在误比特率(Bit Error Rate, BER)方面表现出了一致性。由此可得出, scale因子的引入, 提高了译码效率, 同时译码性能也没有下降。同理, 图3(b)是上述三种算法的平均迭代次数曲线, 其中原始BP译码算法没有采用提前终止迭代策略, 平均迭代次数保持为预设的最大值60次; 当信噪比越来越大的时候, 这两种改进算法: 基于提前终止迭代的BP译码算法, 基于scale因子的提前终止迭代译码算法, 它们的平均迭代次数保持一致。这表明在高信噪比

条件下,两种算法在迭代效率上没有显著差异。

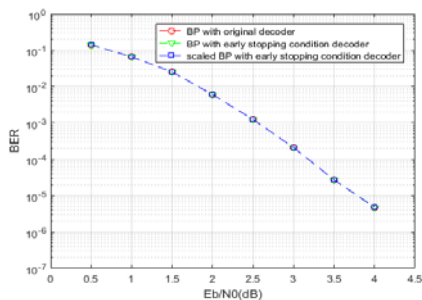


图3(a) 参数为(512,256)的极化码,三种译码算法错误率曲线比较

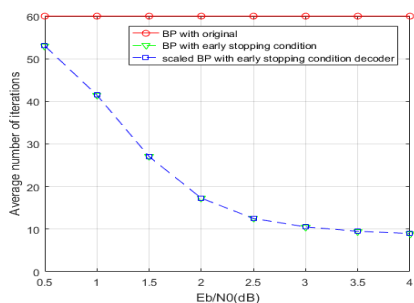


图3(b) 参数为(512,256)的极化码,三种译码算法平均迭代次数曲线比较

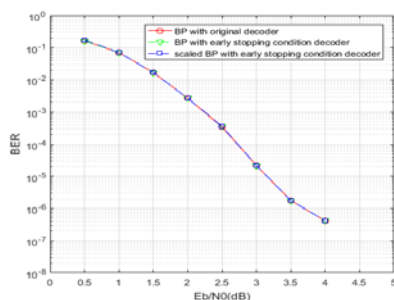


图4(a) 参数为(1024,512)的极化码,三种译码错误率曲线比较

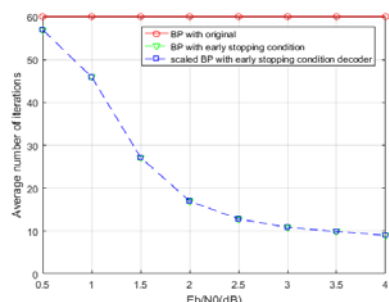


图4(b) 参数为(1024,512)的极化码,三种译码算法平均迭代次数曲线比较

与图3类似,图4为参数(1024,512)的极化码,在标准BP译码算法、基于提前终止迭代的BP译码算法、基于scale的提前终止迭代改进BP译码算法下的误比特率曲线比较,三者性能上保持一致,改进的BP译码算法没有性能损失。在对比图4(b)三种算法的平均迭代次数曲线时,我们观察到随着信噪比的增加,采用提前终止迭代策略的改进BP译码算法与基于scale的提前终止迭代BP译码算法在平均迭代次数上展现出了一致性。通过对比标准BP译码算法,改进的算法有如下优势:平均迭代次数减少,同时译码性能并没有损失。

#### 4 结语

本文提出了一种基于scale的提前终止策略的极化码的改进BP译码算法,通过比较部分信息比特的似然比信息变化值与收敛阈值的大小,判断信息比特是否达到收敛,当该部分信息比特达到收敛时,停止迭代。仿真结果表明,性能没有下降的基础上,该算法与<sup>[5]</sup>相比平均迭代次数没有增加;一定程度上降低了译码复杂度,但是应该还有更简便的降低译码复杂度<sup>[6][7][8]</sup>的方法,值得我们进行更深入的研究。

#### [参考文献]

[1]E.Arkan, "Channel polarization:A method for constructing capacity achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels," IEEE Trans. Inf.Theory, vol.55, no.7, pp. 3051-3073,2009.

[2]I.Ta and A. Vardy, " List decoding of polar codes, " in Proc.2011 IEEE Int. Symp.Inform.Theory,pp.1-5,2011.

[3]I.Ta and A.Vardy, " List decoding of polar codes, " arXiv:1206.0050v1,May2012.

[4]K.Chen,K. Niu,and J.R.Lin, " Improved Successive Cancellation Decoding of PolarCodes, " IEEE Trans.Comm., vol.61,no. 8,pp.3100-3107,August2013.

[5]刘军旗.极化码的改进BP译码算法研究[D].西安电子科技大学,2015.

[6]E. Arikan, " Polar codes: A piled implementation, " in proc.4th Int. Symp. on Broad.Commun ISBC 2010, pp.11-14, July 2010.

[7]A. Pamuk, "An FPGA Implementation Architecture for Decoding of Polar Codes, " in Proc.8th Int. Symp. Wireless Commun.Syst.(ICWCS),Nov.2011,pp. 437-441.

[8] Bo Yuan and Keshab K. Parhi, " Early Stopping Criteria for Energy-Efficient Low-Latency Belief-Propagation Polar Code Decoders, " IEEE Trans. Sig. Processing,vol.62, no.24,pp. 6496-6506,2014.