对偶式在数学竞赛中的运用

叶元明
武汉市新洲区城关高级中学
DOI:10.32629/jief.v7i9.18276

[摘　要] 在数学学习的过程中不难发现,几何中存在对称图形,事实上代数式中也存在着对称,我们把具有某种对称关系的式子称为一对对偶式。构造对偶式是基于对称思想的一种解题方法,需要利用题目所给的已知条件,构造出一个结构相似的对偶式,通过两者和、差、积等运算,使其能巧妙化简,从而巧解数学问题,达到事半功倍的效果。
[关键词] 对偶式；数学竞赛；应用
中图分类号：C931.1　文献标识码：A

The Application of Dual Expressions in Math Competitions

Yuanming Ye
Chengguan Senior High School, Xinzhou District, Wuhan

[Abstract] In the process of learning mathematics, it is not difficult to find that there are symmetrical figures in geometry. In fact, symmetry also exists in algebraic expressions. We refer to expressions that have a certain symmetric relationship as a pair of dual expressions. Constructing dual expressions is a problem−solving method based on the idea of symmetry. It requires using the given conditions in a problem to construct a dual expression with a similar structure, and then using operations such as sum, difference, or product between the two to simplify skillfully, thereby solving mathematical problems effectively and efficiently.
[Key words] dual expressions; math competitions; application

引言

通过构造“对偶式”,可以巧妙地解决一些与函数或方程等相关的问题,如函数解析式、多项式求值、恒等式或不等式的证明、函数的最值、解方程(组)、三角函数以及数列的综合应用等相关问题,解决问题的难点在于如何从题设条件入手,合理构造解题所需要的“对偶式”。具体地,在解答某些与函数或方程等相关的数学问题时,针对已知式子M的结构特征,有针对性地构造一个或几个与之相关联的式子N,使得式子M与N经过相加、相减、相乘、相除等代数运算之后,所需解答的问题得到合理的转化和巧妙的解决。这种解题方法称为构造“对偶式”解题,是一种极其巧妙的解题方法[1]。

1 对偶式在数学竞赛中的运用实例分析

1.1构造和差对偶式

和差对偶式一般是指形如u(x)±v(x)的式子。我们改变代数式中的“±”符号,即将“+”换成“-”,将“-”换成“+”,即可构造出和差对偶式。然后将其与原式相加减,就能消去原代数式中的某些复杂项,从而顺利地通过化简得到所要求的值[2]。和差策略构造对偶式的常见类型主要为：$M+N$；$M-N$；$\sqrt{M}+\sqrt{N}$；$\sqrt{M}+\sqrt{N}$；M^2+N^2；M^2-N^2等等。

例1 （1998年加拿大竞赛题）求所有的实数x，使得 $x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$成立。

解析 该方程为无理方程,通过平方去根号的思路解方程会导致运算量相当大,求解过程复杂,不易直接解出方程的解。那么观察方程,根据方程的结构特征,构造一个结构类似的对偶式 $y=\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}$.将两式进行和积运算,得出 $\begin{cases} x+y=2\sqrt{x-\frac{1}{x}} \\ xy=x-1 \end{cases}$

则有$x+1-\frac{1}{x}=2\sqrt{x-\frac{1}{x}}$

化简有 $(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-1)^2=1$

解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

因为x>0,故 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

例2 若5m+3n=10,求mn最大值.

解析 方法一：题目要求mn最大值,因此可以想到需要运用完全平方公式。

设A=(5m+3n)^2=100,B=(5m−3n)^2.

观察两个式子可得：A−B=60mn.

当mn最大时,B=0,此时 $60mn=100$，$mn=\frac{3}{5}$，所以mn的最大值为 $\frac{3}{5}$,

方法二：观察题目所给已知条件,令5m=5+t，3n=5−t.

则有 $mn=\frac{5+t}{5}\cdot\frac{5-t}{5}=\frac{25-t^2}{15}$.

当mn最大时，t^2 =0,此时 $mn=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$.

例3 (2004年“五羊杯”初中数学竞赛试题)以[x]表示不大于x的最大整数,例如[3.7]=3,3=3,则$[(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6]=$____.

解析 设 $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2=m$ ，$(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2=n$，

则$m^3+n^3=(m+n)[(m+n)^2-3mn]=10582$.

因为 $0<\sqrt{6}-\sqrt{5}<1$,

所以 $0<n^3<1$

得出 $[(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6]=[m^3]=[m^3+n^3]-1=10582-1=10581$

方法评析对于含无理式的方程,通过构造对偶式,简化了复杂的结构讨论,降低问题的难度,通过降维解法使得解答自然,探索过程更加简洁,运算更加轻松,巧妙解决问题[3]。

1.2构造互倒对偶式

针对相应三角关系式的结构互倒对偶,通过已知三角关系式的某些元素,取倒数而合理构造对应对偶式,进而来解决相应的三角函数问题。互倒对偶法的实质是借助基本不等式等来合理放缩与变形。

例4 已知x，y，$z\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求证：

$$\frac{1}{1-\sin x+\sin y}+\frac{1}{1-\sin y+\sin z}+\frac{1}{1-\sin z+\sin x}\geq 3$$.

解析 由于 x，y，$z\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin x,\sin y,\sin x\in(0,1)$，1,可得 $1-sin x+sin y>0$，$1-sin y+sin z>0$，$1-sin z+sin x>0$.

设 $M=\frac{1}{1-sin x+sin y}+\frac{1}{1-sin y+sin z}+\frac{1}{1-sin z+sin x}$ ，构造对偶式 $N=(1-sin x+sin y)(1-sin y+sin z)(1-sin z+sin x)=3$. 结合基本不等式,可得 $M+N=\left[\frac{1}{1-sin x+sin y}+(1-sin x+sin y)\right]+\left[\frac{1}{1-sin y+sin z}+(1-sin y+sin z)\right]+\left[\frac{1}{1-sin z+sin x}+(1-sin z+sin x)\right]\geq 2+2+2=6$. 当且仅当 $\sin x=\sin y=\sin x$时等号成立.

于是可得 $M\geq 3$. 所以 $\frac{1}{1-\sin x+\sin y}+\frac{1}{1-\sin y+\sin z}+\frac{1}{1-\sin z+\sin x}\geq 3$

方法评析 解决此类三角不等式问题,在解题过程中巧妙构思,挖掘三角关系式的结构特征,合理对分式三角关系式进行取倒数构造,进而结合互倒对偶的创设,引入到问题中,加以合理变形与转化,从而突破难点,化生为熟,结合不等式的基本性质来合理化解,实现三角不等式的证明。

1.3构造互余对偶式

三角函数中的正弦与余弦是两个互余的对称元素,利用互余关系来构造对偶式,借助配对思想可以轻松简捷地完成有关三角函数问题的解答与应用。互余对偶法的关键就是借助平方关系恒等变形与转化。

例5 (1991年全国高中数学联赛试题)cos^{2}10°+cos^{2}50°−sin40°sin80°的值为____.

解析 本题主要考查三角函数的转化和化简,常常采用降次的方法进行解决,但运算较为繁琐。事实上,从整体结构思考,将cos^{2}10°+cos^{2}50°−sin40°sin80°视为一个整体(令为A),

构造互余对偶式sin^{2}10°+sin^{2}50°−cos40°cos80°(令为B),即

A=cos^{2}10°+cos^{2}50°−sin40°sin80°,

B=sin^{2}10°+sin^{2}50°−cos40°cos80°,

将两式进行和差运算可得：A+B=2−cos40°,

$A-B=cos 20°+cos 100°-\frac{1}{2}=cos 40°-\frac{1}{2}$，解得$A=\frac{3}{4}$.

1.4构造轮换对偶式

轮换策略是指在多项式或者数学式中的多项式部分对两个或两个以上的字母进行轮换或部分进行轮换[3]。

例6 已知 a，$b\in(1,+\infty)$，+∞证明：$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geq 8$.

解析 令 $M=\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}$ 对其分子进行轮换对称构造对偶式 $N=\frac{b^2}{b-1}+\frac{a^2}{a-1}$，则 $M-N=\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}-\frac{b^2}{b-1}-\frac{a^2}{a-1}\geq 0$，即 $M>N$. 又 $N=\frac{b^2}{b-1}+\frac{a^2}{a-1}=\frac{b^2-1}{b-1}+\frac{a^1-1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{a-1}=b-1+2+\frac{1}{b-1}+a-1+2+\frac{1}{a-1}\geq 2+2+4=8$,所以M>8.

评析 评析轮换策略有时是整体轮换有时是部分轮换,本例中只对分子进行轮换构造了对偶式 $N=\frac{b^2}{b-1}+\frac{a^2}{a-1}$，通过对互为对偶式的两式进行研究使原不等式得证。

1.5构造共轭对偶式

对于虚数或复数问题,可通过构造共轭对偶式来解题,对于复数$z=a+bi(b\neq 0)$,其共轭复数为$\bar{z}=a-bi(b\neq 0)$,根据共轭复数的运算法则可得$z+\bar{z}=2a$、$z-\bar{z}=2bi$、$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$,从而达到解题的目的。

例7 若 $z\in C$, $|z|=1$ 且$z\neq\pm 1$,证明：$\frac{z-1}{z+1}$为纯虚数.

解析 设 $M=\frac{z-1}{z+1}$,则其共轭复数为 $N=\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$,

因为 $|z|=1$且 $z\neq\pm 1$,所以$z\cdot|\bar{z}|=1$,

则 $M+N=\frac{z-1}{z+1}+\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)-(z+1)(\bar{z}-1)}{(z+1)(\bar{z}+1)}=0$,

故 $M=\frac{z-1}{z+1}$ 的实部为0,

又因为 $z\neq\pm 1$,所以$\frac{z-1}{z+1}\neq 0$,因此$\frac{z-1}{z+1}$ 为纯虚数.

我们知道,互为共轭复数的两个复数相加,其和为实数,即$z+\bar{z}=2a$ 来证明实部为0,只要证明虚部不为0,即可解题。

2 小结

在数学解题过程中,要合理依托对偶式的构建,有时还要借助三角关系式的次数加以合理综合,巧妙类比拓展与应用,实现问题的巧妙转化与合理突破[4]。在解题研究中,恰当地构造对偶关系式,进而加以合理逻辑推理与数学运算等,不仅能有效提高解题速度,而且能收到以简驭繁、巧妙转化、拓宽思路等良好功效,可以发散学生的数学思维,培养良好的数学解题习惯,有效激发学习数学的兴趣。

[基金项目]

教育部产学协同育人项目,项目编号：241006627080140。

[参考文献]

[1]邹玲.巧构“对偶式”,妙解数学题[J].数理天地(高中版),2025,(09):48-49.

[2]高明.构造对偶式巧解竞赛题[J].中学教研(数学),2013,(10):46-47.

[3]徐静.构造对偶式解题研究[J].中学数学研究(华南师范大学版),2023,(23):37-39.

[4]黄健.构造对偶式,妙解三角题[J].中学数学,2025,(7):128-129.

作者简介：

叶元明(1981--),男,汉族,湖北新洲人,本科,中教一级,研究方向：数学教育。