神秘的自然常数 *e*

吴秋霞[1]　卓剑[2]
1 宿迁学院　2 宿迁市钟吾国际学校
DOI:10.32629/jief.v2i10.2212

[摘　要] 自然常数 e 跟 π 和 $\sqrt{2}$ 相比，不太容易被学生接受，因为 π 和 $\sqrt{2}$ 都有各自的直观解释：π 表示直径为 1 的圆周长，$\sqrt{2}$ 表示边长为 1 的
单位正方形的对角线的长度，本文旨在通过对 1. e 的由来；2. e 的定义和计算；这两个方面的阐述，让学生深入了解这个无限不循环小数，最后通过一个应用，再次强调 e 的重要性，并加入课程思政的元素，旨在教育学生要感恩祖国，以祖国为荣.

[关键词] 自然常数 e；复利；自然律；$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$；疫情防控
中图分类号： G633　**文献标识码：** A

引言

在《初等数学研究》课程的教学中，经常会有学生提出类似“自然常数 e，我怎么感受不到它的自然呢？”这样的问题，基于课程特点，本文将从 1. e 的由来；2. e 的定义和计算；3. 新冠疫情防控中的 e 三个角度一起探索神秘的自然常数 e.

1　*e* 的由来

苏格兰数学家约翰.纳皮尔发明了对数，人们认为，纳皮尔对数实际上就是以 $\frac{1}{e}$ 为底的对数，但他本人并没有意识到这一点. 1683 年数学家雅各布.伯努利提出复利问题，半个世纪后，数学大师莱昂哈德.欧拉在解决复利问题的过程中，发现了自然常数 e，因此这个数也被称为欧拉数.

现在来看复利问题：所谓复利，也就是利滚利，假如在银行存入 1 元钱，银行给的年利率是 100%，一年后你会得到（1+1）^{1}=2 元的收益（如图 1），如果 6 个月结息一次，一年结算两次，利率就是 50%，那么第 6 个月可以拿到利息 0.5 元，把这 0.5 元连同本金 1 元一起存入银行，一年后收益为（如图 2）$(1+0.5)(1+0.5)=(1+\frac{1}{e})^2=2.25$ 元. 如果每四个月结息一次且每次结算后利息连同本金立马存入，一年结算三次，一年后收益为 $(1+\frac{1}{3})^3\approx2.3074$ 元（如图 3）…，如果每月结息一次呢？每天呢？每小时呢？每分钟、每秒，甚至每个瞬间呢（假设理论上是可以的）？你的 1 元钱会不会变得越来越多，一年后你就成了大富翁呢？不可能！你会发现好像有一个“天花板”挡住了你的发财梦，这个“天花板”是什么呢？通过描点作图画出函数 $y=(1+\frac{1}{n})^n$ 的部分图像，刚才说的天花板，就是这条红线！（如图 4）

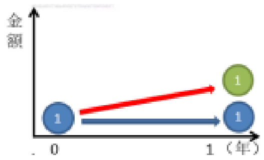

图 1

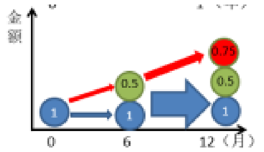

图 2

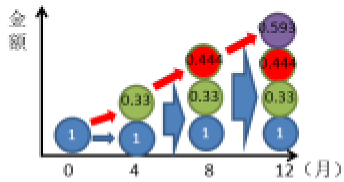

图 3

2　e 的定义和计算

通过刚才简单的计算和画图：观察发现红线的位置位于 2.718 到 2.7185 之间. 也就是当 $n\to\infty$ 时，$(1+\frac{1}{n})^n$ 可能趋近于一个无限不循环十进小数，不妨猜想：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，实际上从戴德金分割原理到确界定理，再到单调有界定理，我们可以证明 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 极限是存在的，现在我们来看一下这个极限值是不是等于 e 呢？

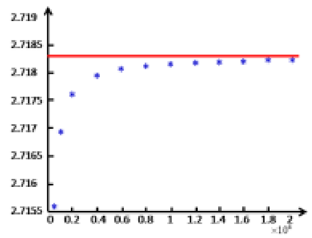

图 4

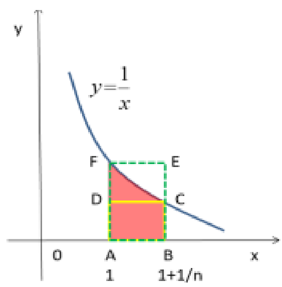

图 5

大家百度搜索，会发现这样一种证明 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ 的方法：
如图 5 中，曲边梯形的面积记为 S，则 $S_{ABCD}<S<S_{ABEF}$，其中 $S=\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{x}dx$，

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2705-1196（P）/2705-120X（O）

就有

$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}\cdot 1$ ，化简，得 $\frac{1}{n+1}<\ln x\Big|_1^{1+\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}$，两边同乘以 n，得 $\frac{n}{n+1}<n\cdot\ln(1+\frac{1}{n})<1$，根据两面夹法则，得 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})^n=1$，

也就是 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$. 在这个“证明方法”中，涉及了对数函数，有“循环论证”的嫌疑.

实际上我们还是从复利问题着手：把 $(1+\frac{1}{n})^n$ 中的 n 取足够大来算算看！得到下面这个表格：

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.25
3	2.3074
4	2.4414
5	2.4885
10	2.5936
100	2.7051
1000	2.71692
10000	2.71815

可以发现：要想得到五位准确小数，n 要算到很大，因为古代没有计算机，这对古人来说，要花费大量时间去计算. 当然我们也可以用牛顿给出的关于指数函数的幂级数展开式来计算 e.

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$，设这个式子中的 x=1，就得到

$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$，用它来计算 e 的值，请看下表：

n	$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$
1	2
2	2.5
3	2.666666
4	2.708333
5	2.716666
6	2.718055
7	2.718253

比较两张表，可以看出用第二种方法比第一种能更快得到准确的 e 的值.

综上所述，e 的含义可以表述为：单位时间内，持续的翻倍增长所接近的极限值. 这个过程体现了“趋于稳定的平衡”这个“自然律”. e 是一个数字，它本身就是自然存在的，人类只是发现了 e（不能说证明了 e，只能说发现了 e)，因而称之为自然常数. 它的定义式就是 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

3 新冠疫情防控中的 e

这场不期而遇的疫情，让我们看到了中国的强大，更看到了全国人民的凝聚力. 以 e 为底的自然对数，在很多领域有着广泛的应用。下面我们结合中国新冠疫情的防控来看一看它的具体应用！

根据传染病流行的规律，设 x 是患病人数，y 是接近这些人而被传染的人数，它们都是时间 t 的函数，则有：$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=mxy-nx & (1)\\ \frac{dy}{dt}=-mxy & (2)\end{cases}$ 其中 m 和 n 分别是不一定相同的正常数，（1）式中的 mxy 表示容易被传染人群中变成患者的增速，$-nx$ 表示患者因病死而减少的速度，（2）式中的 $-mxy$ 表示容易被传染人群中因感染后，被传染人群减少的速度，（1）+（2）得到：$\frac{dx}{dy}=-1+\frac{n}{my}$ (3) 即 $dx=(-1+\frac{n}{my})dy$ (4) 把（4）两边积分，并代入初始条件 $x=x_0$，$y=y_0$ 就有：$x=x_0+y_0-y+\frac{n}{m}\ln\frac{y}{y_0}$ (5) 注意！在预测患者人数的计算公式（5）中出现了 e！分析（3）式有：当 $y<\frac{n}{m}$ 时，$\frac{dx}{dy}>0$，x 是以 y 为自变量的单调递增函数，当 $y<\frac{n}{m}$ 时，$\frac{dx}{dy}<0$ ，x 是以 y 为自变量的单调递减函数，这就：疫情初期即 $y<\frac{n}{m}$ 时，感染人数增加很快，应该加强早期控制，到了疫情后期，即 $y<\frac{n}{m}$ 时，虽然感染人数增加较慢，但已经造成了很多人死亡！

由此可见，我们国家果断封城，全民动员，有效进行了早期控制，尽可能阻止疫情扩散，最大程度地减少了死亡，是有科学依据的. 这也反映了我国政府对生命的敬畏和对科学的尊重.

通过刚才的分析，我们体会了自然常数 e 的神秘，感受了它的“自然”，实际上它在很多领域都非常活跃. 更多关于 e 的内容，期待广大读者积极去了解和深入研究.

［参考文献］

[1]王欣,齐新社,王娜.再谈自然常数 e 的存在性及无理性[J].高等数学研究,2019,22(03):1-2.

[2]李康.自然常数 e 的指数形式与生活中物理现象的联系[J].物理通报,2019(03):126-128.

[3]庞荣波.浅谈自然常数 e 的命名者——欧拉[J].科教文汇(上旬刊),2009(01):274.