“一题多解与多题一解”在培养学生思维能力中的应用

从玉龙

山东省博兴第二中学

DOI:10.32629/jief.v2i10.2224

[摘要] 数学学习的基本步骤一般都是在掌握原理的情况下进行习题训练，在训练习题的过程中证明新的方法原理，以此循环促进知识的不断进步发展。下文将首先论述两种教学方法的实际意义，然后介绍这些方法在具体教学中的应用效果。

[关键词] 一题多解；思维能力；应用

中图分类号：G633.6 **文献标识码：**A

引言

一题多解以及多题一解的数学思维普遍存在于数学学习中，这两种思维本质上属于哲学中的化归思想，为了能够将这两种方法充分推广和应用，有关数学教学从业人员应该注重学生本身的思维能力训练，同时良好的理论知识教学基础上，对其开展科学、合理的解题教学，由此进行有效合理的教学方式转换，增强他们的学习兴趣。

1 一题多解与多题一解的应用价值意义

1.1 一题多解的应用意义

一题多解就是倡导学生在面对一个数学问题的时候能够从多个角度去找到解决的办法，思考问题的本质。这种教学模式能够极大程度上拓宽学生的思维能力，提高他们的数学素养，逐渐培养学生解决数学问题的方法以及思考方式。数学创新发展的基础在于灵活多变的处理方式，因此教师在教授数学知识的过程中应该能够善于利用这种教学的模式，并且在教授一个具体数学问题的时候能够尝试引领他们分别从不同的角度思考问题，学会利用多种方法去推导结果，尝试找到各种条件之间的关联，利用多种表达的方式去表述问题，这样才能够促进数学学科的发展。

1.2 多题一解的应用意义

多题一解和前面的一题多解是两种不同的数学思维模式，前者将原本数学题目中的一些基础条件进行替换，或者更换数学的问题之后要求学生计算问题的结果，或者省略问题中原本的一些条件由学生自己补充，这种数学结构诞生的根本目的在于能够拓宽他们的数学思维发散能力，通过难度的不断提升拓宽他们的知识面。在进行教学的过程中，数学教师往往需要能够结合课本中的示范例题进行变换，学生会不同的问题条件以及层次中学找到原本问题的根源所在，这种教学最大的帮助就是能够对于基础的数学问题模型取得本质性的了解，在数学学习中很多的

问题其实运用同样的知识原理，只有充分掌握这种基本的规律才能够最终以不变应万变，培养他们自身的归纳类比，概括抽象以及空间想象等思维能力。

2 两种教学模式在学生思维培养方面的应用

2.1 培养开放探究的思维模式

数学教学过程中的案例分析最为重要，但是传统应试教学中的题海战术并不是一种理想的案例教学方法。正确的教学方式正如同带兵作战一样遵循少而精的原则，在数学问题的研究中应该能够培养学生举一反三，温故知新的能力，利用科学的思维模式解决数学问题，例如下面运用一题多解的方式来推导基本不等式的教学案例。

例题 已知： $a>0, b>0, \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ ，求 ab 的最小值。

解法一 利用不等式关系

$$\because a>0, b>0, 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$$

$\therefore ab \geq 8$ (当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{1}{2}$ ，即 $a=2, b=4$ 时取“=”号)，

$\therefore ab$ 的最小值是 8。

解法二 平方法

$$\because a>0, b>0, \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1,$$

$$\therefore 1 = \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a^2b^2}} + \frac{4}{ab} = \frac{8}{ab}$$

(当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{1}{2}$ ，即 $a=2, b=4$ 时取“=”号)。

$\therefore ab$ 的最小值是 8。

解法三 利用三角恒等关系换元

$$\because a>0, b>0, \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1, \text{ 可令 } \frac{1}{a} = \cos^2 \alpha, \frac{2}{b} = \sin^2 \alpha,$$

$$\therefore a = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, b = \frac{2}{\sin^2 \alpha},$$

$$\therefore ab = \frac{2}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{8}{\sin^2 2\alpha} \geq 8 \text{ (当且仅当 } \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \text{ 时取“=”号)}.$$

$\frac{1}{2}$ ，即 $a=2, b=4$ 时取“=”号)。

$\therefore ab$ 的最小值是 8。

在本题中一共列举了三种不同的思维解法，但是最终发现所有的计

算结果都是趋于一致的，即利用一题多解的方法不仅能够提高学生的思维创新能力，同时能够更加验证结论的重要性。

2.2 提高问题的分析能力

在数学练习中通过一题多变或者多题一解的方式进行解答能够从不同方面看到不同的问题，帮助学生提高数学的应变思维能力。尤其对于一题多变的数学模式，该理念能够将原本已有的思维理念移植到新的题目环境下，增加接替的思维以及方法。在平常的应用生活中通常具有很多的外在体现，例如将原本题目中的数字改变，或者深化条件的侧重点，在不改变基本运行原理的情况下能够进行更加深入的推广，下面就是关于三角函数一题多变的应用。

例题 已知 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ，求 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 。

变一：已知 $\tan \alpha = 1$ ，求 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 。

变二：已知 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ，求 $\tan \alpha, \cos \alpha$ 。

从上述的案例中可以发现，在三角函数中正弦，余弦，正切几个函数之间虽然具有明确的关系，但是两两之间的转换往往复杂多变，通过给出一个具体的元素并且再附加一个另外的条件往往能够求出二者之间的关系，在平常的联系活动中如果仅仅将问题局限于单一的题目模式中，往往会导致他们的解题思维固化，所以常常需要在这几个元素之间进行不断的条件变换。

3 在平常练习以及习题中的广泛运用

一题多变以及多题一解虽然会广泛出现在各个年龄段的数学学习中，并且各个地方教学模式不尽相同，但是数学教师应该能够明确这两种教学模式实质上属于一种哲学的思维，数学知识和哲学思维本身就是一种共通的关系。其中哲学理念中特殊和一般的关系正是上述数学思维的重要体现，数学题目中本身设计到的方法原理就是问题的本质，即一

般大同性，而不断分解出来的问题就是单独的问题，可以将其称为特殊性，一题多变就是由一般到特殊的转变，而后者又是从特殊到一般的汇总，数学教师只有明白这两种数学思维之间的联系和区别才能够对于未来的教学目标做出更加精准的把握，让学生体会到数学学习的博大精深。

正如数学案例教学中较为古老的抛物线问题，该问题的证明过程并不困难，但是后续推出的结论往往会服务于更多的数学理论，有效运用该结论的前提则要求学生能够对于推导的原理做出充分理解。这里也就会牵扯出由一般到特殊的证明方法，例如原本的结论可以再次延伸到如何证明三点共线，如何证明焦点弦中点的切线平行于对称轴等问题，另外有能力的学生还可以自己尝试将公式进行变形，使得自身的思维得以充分的发散和延伸。

4 结束语

数学这门学科非常讲究创新发展以及思维变通，因此该学科是一切理工学科的基础。在应试教育阶段若想能够提高学生解决问题的思维能力应该充分利用“一题多解和多题一解”的数学思维，作为教师应该在教学的过程中积极创新，大胆改造。

【参考文献】

- [1]于晓兰.“一题多解”与“多题一解”在高中数学教学中的价值与实践的探讨[J].赤子:上中旬,2016(23):219.
- [2]熊淑娟.高中数学“一题多解”与“多题一解”的价值探析[J].开素素质教育,2015,000(012):19-19.
- [3]李莉;李慧.化归思想在高中数学解题过程中的应用[J].科学咨询(科技·管理),2020,No.682,175.