高中数学应用题教学中数学思维能力培养的探究

赵彦堂

陕西省镇安县第二中学

DOI:10.32629/jief.v2i11.2375

[摘 要] 数学应用题教学要把抽象能力的培养作为重要目标,要始终如一地作好数学建模,要时刻不忘学生推理能力的培养。

[关键词] 数学应用题;抽象;推理;模型

中图分类号: G633 文献标识码: A

数学应用题是实际问题中的背景和条件简化后可以转化为纯数学问题来求解的一类问题。它有两个出发点:现实与数学,是沟通数学与现实的桥梁。解决数学应用题的一般步骤为:1.阅读理解(弄清题意);2.建立模型(拟定计划);3.求解模型(实现计划);4.还原实际(回顾反思)。虽然不同类型的应用题的课堂结构、教学策略不同,但贯穿应用题教学的主线——抽象、推理、数学建模是不变的,因为这三者是数学基本思想,其核心是培养学生数学思维习惯,使学生会在错综复杂的事物中把握本质,进而抽象能力强;会在杂乱无章的事物中理清头绪,进而推理能力强;会在千头万绪的事物中发现规律,进而建模能力强。在应用题教学中我们应当注意以下三点:

1 把抽象能力的培养作为重要目标

"抽象"一词来源于拉丁语,有"拖拽"之义。从字面上看,抽象可直译为"抽去表象",也即余留事物本质。教学符号、公式、概念、定理等都是抽象的产物。抽象是数学的基础,也是数学发展的保证和需要。

数学抽象能力是数学能力的核心部分,是对具体的实例观察、分析、归纳、综合的过程中概括出相应结论并将其推广、应用于解决问题或作出判断。可以看出,数学应用题是培养学生数学抽象能力的绝佳载体,因为数学应用题提供了培养抽象能力的四个阶段:情境、适应、转换、创造。

在应用题教学中,应该注意从下面两个方面培养学生抽象能力: 1. 注意阅读能力的培养,着重培养学生的检索能力、理解能力、分析能力、归纳概括能力; 2. 从现实进入教学的能力。这是数学抽象的开始,要学会把现实用数学表示出来,用"数学"语言来讲"现实"的故事。

例 1 甲、乙两地相距 skm,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不超过 ckm/h. 已知汽车每小时运输成本(单位:元)由可变部分和固定部分组成,可变部分与速率 v(km/h)的平方成正比,比例系数为 b;固定部分为 a 元.

1.1 把全程运输成本 y(单位:元)表示为速度 v(km/h)的函数,并指出这个函数的定义域.

1.2 为了使全程运输成本最小,汽车该以多大速度行驶.

解析:这个题目的教学中,学生对 s、c、v、b、a 的检索; 对 $t=\frac{s}{\nu}$ 的 理解; 对加法模型、乘法模型、函数模型的分析与应用,尤其是对定义域 (0, c] 的理解,以及在求函数 $y=s(bv+\frac{a}{\nu}).0< x \le c$ 的最小值应分 $0<\sqrt{\frac{a}{b}} \le c$ 和 $\sqrt{\frac{a}{b}} > c$ 两种情况进行讨论是题目亮点所在。另外,本题没有一个具体常数也突出了数学的抽象性,也正因为数学的抽象性才使数学更具一般性。

2 始终如一地作好数学建模

数学应用的广泛性是数学的一个显著特征。数学模型属于数学应用, 是用数学的语言描述现实世界中与数量、图形有关的性质。数学模型使 数学走出了自我封闭的世界,构建了数学与现实世界的桥梁,避免了数 学退化。

数学模型是框图、图表、图像、由数学符号、字母和数字构成的式子、算法等刻画客观事物数量关系的数学结构。在应用题教学时,我们应该对问题做出必要的简化和合乎情理的假设,把现实问题转化为纯数学问题,运用正确的、合适的、有效的方法求解。只有在直观想象,数学抽象的基础上进行逻辑推理才能形成较为准确的数学模型。从途径上说,数学模型与抽象恰恰方向相反。因此,数学模型的建立也是牵一发而动全身,在核心素养中具有重要的作用。

在离散型随机变量的复习课上,笔者设计了如下题目:

- 一个不透明的袋子中装有红色、白色的小球若干,这些小球除颜色不同外,其大小,材质均完全相同.有放回的从袋中摸出 5 个小球,取出红球的个数为随机变量 X.设从袋中随机摸出 1 个小球是红球的概率为p(0 .
 - 2.1 写出 P(X=3) 关于 p 的函数关系式;
 - 2.2 求当 P(X=3)取得最大值时 P的值;
- 2.3 取 P 的真值为(2) 中的结果,列出 X 的随机分布列,并求出 X 的 \mathfrak{m} \mathfrak{p}

解析:该题的数学模型是"独立重复实验".题目中"不透明","随机","有放回"等关键词都集中指向这一模型,很容易给出(1)的解答。要求函数的极大值很容易选用导数这一有效工具,(2)极易完成.在(1)、(2)的基础上,(3)的完成是水到渠成。题目不难,但是蕴含在题中的是对"用样本估计总体"这一统计思想的认识,以及对"或然"与"必然"的辩证理解。同时这个题目的设计为"最大似然原理"的认识埋下伏笔。

3 时刻不忘培养学生的逻辑推理能力

数学推理就是把表示关系的运算方法、逻辑术语用于研究对象,得到数学结论或验证数学结论。数学推理是数学自身发展的需要,也是培养学生逻辑推理能力,形成数学直觉和数学思维的必需。数学推理就是讲道理,数学应用题就是讲一个关于"现实"的故事,这个故事中推理是贯穿始终的。如果"故事"讲述中"推理"退场,那极有可能是"痴人说梦",甚至"胡说八道"。在推理教学中,归纳推理与演绎推理同样重要,甚至归纳推理比演绎推理还为可贵:因为归纳推理是"发现"知识的推理。

在培养学生推理能力中要注意: (1)定义、定理的作用; (2)推理的一般形式; (3)研究命题的重点是命题真假的判断。

下面两个题目的解答充分体现了逻辑推理的作用,请读者试一试。

例 2 己知
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots$$
 $\left(1+\frac{1}{2^s}\right)$

例 3 一长为 10m,质量为 20kg 的均匀铁链悬挂在楼房顶上。求把它完全拉上楼房顶所作的功.

注:例 2 利用对数化"积"为"和"。对数的性质、数列的性质、函数的性质是推理的依据;例 3 利用直观想象,定积分可以得出答案,力的变化与定积分是推理的依据。

当然,抽象、推理、模型不是孤立存在的,他们彼此联系。具体到某个问题,可能有所偏重。在应用题教学中注意了以上三点,对培养学生数学思维能力是大的帮助的。

[参考文献]

[1]史宁中.数学基本思想 18 讲[M].北京:北京师范大学出版 社,2016.10:216. [2]波利亚.怎样解题[M].涂泓,冯承天,译.上海:上海科技教育出版社,2002.

[3]史宁中.数学基本思想 18 讲[M].北京:北京师范大学出版 社,2016.10:12.

[4]徐治利.数学抽象方法与抽象度分析法[M].南京:江苏教育出版社,1988:1-2.

[5]罗梦玮,赵继源.数学抽象能力发展过程及培养策略研究[J].南宁:南宁师范大学学报(自然科学版),2019(9):138-140.

[6]刘金顺,何绍庚,译.数学史译文集[M].上海:上海科学技术出版 社,1981:123.

