第 8 卷◆第 1 期◆版本 1.0◆2025 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

深度学习理念下的函数应用探究活动

秦红霞　赵月灵
北京市通州区路河中学
DOI:10.12238/mef.v8i1.10161

[摘　要] 深度学习强调学生主动参与学习活动,综合运用所学知识创造性地解决问题。数学探究活动是高中数学课程的重要内容,也是深度学习的主要方式之一。笔者将设计矩形花圃使其面积最大的问题,改编为开放性问题“对于一边靠墙的花圃,如何设计围栏使得花圃的面积最大”。围绕这个问题,引导学生提出不同的设计方案,并采取分组探究、合作交流等方式,综合运用所学知识及信息技术创造性地解决问题。在解决问题的过程中,学生对于不同的图形,建立二次函数、三角函数、一元复合函数、二元函数等,利用基本函数的性质、基本不等式、导数、几何意义等解决函数的最值问题,感悟数学思想,提高分析和解决问题的能力。
[关键词] 深度学习；函数应用；探究活动
中图分类号：D442.63　文献标识码：A

Function application exploration activities under deep learning concept

Hongxia Qin　Yueling Zhao
Luhe Middle School, Tongzhou District, Beijing

[Abstract] Deep learning emphasizes that students take the initiative to participate in learning activities and use the knowledge to solve problems creatively. Mathematical inquiry activity is an important part of high school mathematics curriculum and one of the main ways of deep learning. The author changed the problem of designing a rectangular flowerbed to maximize its area into an open problem of "How to design a fence to maximize the area of a flowerbed with one side against a wall".Around this problem, students are guided to propose different design schemes, and adopt the way of group exploration, cooperation and communication, and comprehensively apply the knowledge and information technology to solve the problem creatively. In the process of problem solving, students establish quadratic functions, trigonometric functions, monadic compound functions, binary functions, etc. for different graphs, use the properties of basic functions, basic inequalities, derivatives, geometric meanings, etc., to solve the maximum value problem of functions, understand mathematical ideas, and improve the ability to analyze and solve problems.
[Key words] Deep learning function application inquiry activity

引言

深度学习是一种主动探究式的、高阶思维式的、有效迁移运用知识解决问题的学习。深度学习主张教师设计“挑战性学习任务/活动”, 使学生从单纯的、封闭式的、缺乏挑战性的活动, 走向复杂的、开放的、探索性的学习任务的完成, 从个体学习走向师生、生生共同学习和合作交流, 从简单记忆走向深度思考、学以致用, 进而实现教与学方式的根本性转变[1]。

《普通高中数学课程标准(2017年版)》指出：数学探究活动是围绕某个具体的数学问题, 开展自主探究、合作研究并最终解决问题的过程, 也是高中阶段数学课程的重要内容[2]。可见, 数学探究活动是深度学习的主要方式之一。

1 函数探究活动设计

函数是贯穿高中数学课程的主线。多数函数应用的问题都是建立唯一函数模型, 有唯一解的封闭性问题, 探究的味道不浓。所以, 将一些封闭性问题改编成开放性问题是一个不错的尝试。本设计将一道靠墙设计矩形花圃的问题, 改编成开放性问题, 开展综合利用函数知识解决问题的探究活动。

问题：小明家门前有一块空地, 为了美化生活环境, 小明的爸爸准备修建一个花圃, 花圃的一边靠围墙, 他买回了24米长的围栏材料, 怎么设计, 花圃的面积最大呢？

1. 1提出设计方案。学生活动1：独立思考, 提出设计方案, 分享设计方案。

学生设计如下方案：矩形、半圆形、等腰三角形、一般三角形、平行四边形、梯形、弓形等。

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

师：围栏材料都用完吗？

生：解题目标是面积最大，所以花圃应靠墙，材料都用完。

师：就大家设计的图形，猜一猜，哪个形状面积最大呢？

生：可能是半圆。因为周长相等的情况下，圆的面积比较大。

师：根据经验，为使面积最大，一般不设计成窄长形，不妨先假设墙足够长。

设计意图：本环节学生积极思考，主动参与，基于对问题的理解和生活经验提出自己的设计想法，然后分享交流，提出更多设计方案，提升发现问题、提出问题的能力。通过问题，引导学生提出合理的猜想，做出适当的假设，将实际问题抽象成数学问题。

1.2合作探究 解决问题。学生活动2：小组选择要研究的图形，先独立思考，遇到困难，组内合作，师生合作，若有需要，可以借助信息技术。

设计意图：学生经历“作图，建立函数模型，求最值”的过程，巩固所学函数知识和方法。鼓励学生运用信息技术，形成借助信息技术解决问题的意识。

1.3分享交流启迪思维。师生活动：小组代表板书或投影展示研究成果，并反思函数的类型及最值的求解思路，师生合作解决难点。

组1：矩形(图1)

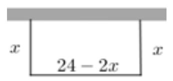

图1

$S=x(24-2x)=-2x^2+24x$，$0<x<12$，所以当 $x=6$ 时，$S_{\max}=72$。

组2：半圆形

设圆的半径为 r，$\pi r=24$，则 $S=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{288}{\pi}\approx 91.7$。

组3：等腰三角形(图2)

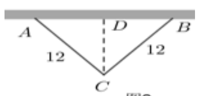

图2

方法(1)：过 C 做 $CD\perp AB$ 于 D，设 $AD=x$，则

$S=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{144-x^2}=\sqrt{-x^4+144x^2}$，$0<x<12$

则当 $x^2=72$ 时，$S_{\max}=72$。

方法(2)：$S=\frac{1}{2}\times 12\times 12\sin\angle ACB$，则当 $\angle ACB=90^\circ$ 时，$S_{\max}=72$。

追问1：对于第一种函数，能否用基本不等式求最值呢？

生：$S=x\cdot\sqrt{144-x^2}\le\frac{x^2+144-x^2}{2}=72$。

组4：一般三角形

设不靠墙的两条边中的一条为 x，则另一条为 $24-x$，两条边的夹角为 α，则 $S=\frac{1}{2}x(24-x)\sin\alpha\le\frac{1}{2}x(24-x)\le 72$，

当 $\alpha=90^\circ$，$x=12$ 时，$S_{\max}=72$。

组5：平行四边形(图3)

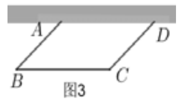

图3

设 $AB=CD=x$，则 $BC=24-2x$，则

$S=x(24-2x)\sin B\le 2x(12-x)\le 72$，当平行四边形为矩形且边长为6, 12, 6时，面积取得最大值72。

组6：弓形(图4，图5)

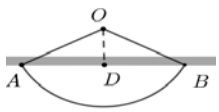

图4

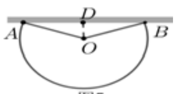

图5

对于图4，设 $OA=r$，$\angle AOB=\alpha$，则 $\alpha r=24$，则

$S=\frac{1}{2}\alpha r^2-\frac{1}{2}r^2\sin\alpha$，$\alpha\in(0,\pi)$。对于图5，设优弧AB所对的圆心角为 α，则 $S=\frac{1}{2}\alpha r^2+\frac{1}{2}r^2\sin(2\pi-\alpha)$

$=\frac{1}{2}\alpha r^2-\frac{1}{2}r^2\sin\alpha$，$\alpha\in(\pi,2\pi)$。形式统一为

$S=\frac{1}{2}\alpha r^2-\frac{1}{2}r^2\sin\alpha$，由 $r=\frac{24}{\alpha}$，得到 $S=288(\frac{1}{\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\alpha^2})$。

利用GeoGebra软件，输入函数，利用极值命令，可以得到

$\alpha=\pi$，$S_{\max}=\frac{288}{\pi}\approx 91.7$。当弓形为半圆时，面积最大。

追问2：能否用导数来求最值？

师生活动：学生独立思考，疑难点合作交流，分享解题方法。

令 $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\alpha^2}$，$f'(\alpha)=\frac{2\sin\alpha-\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^3}$。

当 $\alpha\in(\pi,2\pi)$ 时，$2\sin\alpha-\alpha(1+\cos\alpha)<0$，则 $f(\alpha)$ 单减。当 $\alpha\in(0,\pi)$ 时，令 $g(\alpha)=2\sin\alpha-\alpha-\alpha\cos\alpha$，则 $g'(\alpha)=\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1$，$g''(\alpha)=\alpha\cos\alpha$，则当 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g''(\alpha)>0$，$g'(\alpha)$ 单增；当 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$g''(\alpha)<0$，$g'(\alpha)$ 单减。因为 $g'(0)=0$，$g'(\pi)=-2<0$，所以存在 $\alpha_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$g'(\alpha_0)=0$。因为 $g(0)=0$，$g(\pi)=0$，所以 $g(\alpha)>0$，即 $f'(\alpha)>0$，所以 $f(\alpha)$ 单增。所以当 $\alpha=\pi$ 时，$f(\alpha)$ 取得最大值。

组7：等腰梯形(图6)

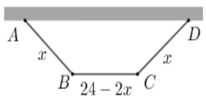

图6

设腰长 x，$\angle DAB=\theta$，则

$$S=\frac{1}{2}(2x\cos\theta+48-4x)x\sin\theta,\ x\in(0,12),\ \theta\in(0,\pi)$$

$$S=\sin\theta(2-\cos\theta)[-(x-\frac{12}{2-\cos\theta})^2+\frac{144}{(2-\cos\theta)^2}]$$

$\le\frac{144\sin\theta}{2-\cos\theta}$，令 $k=\frac{\sin\theta-0}{\cos\theta-2}$，数形结合可得 $k\in[-\frac{\sqrt{3}}{3},0)$，所以 $\frac{144\sin\theta}{2-\cos\theta}\le 48\sqrt{3}\approx 83.1$，当 $\theta=\frac{\pi}{3}$，$x=8$ 时，取得最大面积。

以上研究的都是对称或者规则图形，通过建立二次函数、三角函数、一元复合函数、二元函数等，解决最值问题。经过研究可以猜想，半圆形的面积是最大的。作为实际问题，可以设计更多不规则的图形，课下可以继续研究。

设计意图：师生共同解答解题过程中的疑难，对于陌生的函数，借助信息技术，利用转化思想、数形结合、主元法等，创造性地解决问题。

2 反思与感悟

2.1探究活动把学生的思维引向深度

问题是数学的心脏。开放性问题，会引发多种方向的尝试，能拓展思维的广度。在学生的最近发展区设计有挑战的问题，学生既能联系旧知识，又能有新的增长点，无疑能增强思维的深度。本课学生经历建立函数，求最值的过程，巩固已学“转化为熟悉的函数求最值，利用基本不等式求最值，利用导数求最值”等方法，发展数学运算、逻辑推理素养。本课中学生建立双变量的函数，是较大的挑战，学生经过自主学习、合作探究，解决问题，并反思解决多变量函数问题的一种思路。

2.2注重反思总结，领悟思想方法

波利亚将解决问题的过程分成四个步骤：弄清题意、拟订计划、实现计划、反思[3]。反思能深化对方法本质的理解，强化解题经验。本节课，学生在建立函数研究问题的同时，还需反思思维活动的过程：建立了怎样的函数？用什么方法求函数的最值？还有没有其他的方法？得到的结果合理吗？学生对解题过程进行回顾、反思，感悟解题过程中的思想方法，积累可迁移的活动经验，培养思维的广度和深度。在数学学习中，反思是提高思维能力、优化思维品质的好方法，是促进知识内化和迁移的重要途径。根据建构主义学习理论，学生通过反思，联系已学的相关知识，探索解决问题，改组和重建原有知识结构，使知识结构更加合理。

3 结语

人工智能时代需要具备创新能力、协作交流能力、批判性思考和解决真实问题能力的人才。让学生为应试而学习一些脱离情境的、碎片化的概念和技能，显然不能适应人工智能时代对人才的需求。数学探究活动是高中数学课程的重要内容，其重要性不言而喻，但是教材中关于数学探究的内容还比较少。这就需要教师主动捕捉日常教学素材，积极进行数学探究活动的教学。在探究活动中，师生合作，共同成长，一起领略数学的魅力。

[参考文献]

[1]刘月霞.指向“深度学习”的教学改进:让学习真实发生[J].中小学,2021,366(05):13-17.

[2]中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.

[3]波利亚.怎样解题——数学教学法的新面貌[M].涂泓,冯承天,译.上海:上海科技教育出版社,2002.

作者简介：

秦红霞(1980--),女,汉族,山东省昌乐县人,硕士研究生,高级教师,研究方向：高中数学教学。