现代教育论坛
第 8 卷◆第 1 期◆版本 1.0◆2025 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

中学数学中的函数与方程

朱昱企
天津师范大学

DOI:10.12238/mef.v8i1.10172

[摘　要] 函数是中学数学的核心概念,它不仅仅是一种数字的表达式,而且还涵盖了数学思维、推理、计算等多种方面,为学习者提供了丰富的知识和技能。本文深入剖析了函数和方程的概念,并且详细说明了它们之间的关系,以及如何将它们有效地结合起来。在一系列的实践操作后,文章验证了,在解决数学问题上,函数与方程思维不可或缺,无论是对于不等式、数列、二项式原理、三角学、平面向量技术、解析几何学、空间形体几何学、概率学、统计动力学亦或是求导方面,这些都深受函数和方程的应用影响,并且其影响力还能进一步扩散至更加广泛的学术领域之中。本文通过对中学数学课堂的深入探讨,提出了一些有效的策略来帮助教师提高学生的函数和方程概念的理解能力。

[关键词] 函数；方程应用；中学数学
中图分类号：G633.6　文献标识码：A

Function and equations in middle school mathematics

Yuqi Zhu
Tianjin Normal University

[Abstract] At the heart of secondary math education lies the function, which transcends mere numerical expressions to encompass elements of logic, computation, and various mathematical processes, enriching pupils with a comprehensive set of abilities and knowledge. This study delves into the notions of functions and equations, elucidating their interrelation and how they can be integrated in a synergistic manner. Extensive exercises confirm that the mastery of functions and equations is a crucial instrument in unraveling a wide array of mathematical challenges, ranging from inequalities, sequences, the binomial theorem, and trigonometric functions to plane vectors, analytic and solid geometries, probability, and statistical mechanics, not to mention derivatives. Such applications demonstrate their broad reach beyond mathematics itself. Additionally, this paper offers a thorough analysis of mathematics teaching at the middle school level and puts forward several practical approaches aimed at bolstering students' grasp of these critical mathematical principles.

[Key words] Function; equation application; middle school mathematics

引言

函数是数学的核心概念,对科学技术发展至关重要。16世纪前,常量数学占主导,但变量数学的出现推动了数学和科技的进步。莱布尼茨首次引入函数概念,康托尔用集合重新定义了它。函数教学对提升学生辩证思维和应用能力至关重要,是中学数学的核心,涉及定义、性质、图像等。函数题目在中考和高考中占重要分值,涵盖定义、性质、基本初等函数等考点。加强函数教学能提高中学数学水平,培养学生的辩证唯物主义思想。

1 函数与方程思想的概念

1.1函数思想。通过应用函数的概念和性质,我们可以深入探索自然界中的量的依赖关系,从而更好地理解问题的本质,并有效地将它们转换为可行的方案[1]。因此,函数的核心在于从问题的数学特征中提炼出有意义的信息,并以一种可操作的方式将它们组合起来,从而构成一个完整的函数体系[2]。

1.2方程思想。通过运用数学的思维,我们可以把复杂的现象转化为简单的方程(组)和不等式,从而有效地求出解决问题的答案[4]。

1.3数与方程思想的互转化。通过研究和推理,我们能开发出一种创新的思维模式,将复杂函数简化为易懂的方程,并结合它们以有效解决问题。笛卡尔的方程理论表明,所有事物都可通过相关方程描述,包括复杂和抽象的问题[3]。函数和多元方程虽有差异,但它们相互关联,函数可视为二元方程,对解决几何问题至关重要。方程与函数的结合提供全面的数学思维,帮助我们准确解决实际问题。深入研究常量和变量数学,掌握基本思维方

现代教育论坛
第 8 卷◆第 1 期◆版本 1.0◆2025 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

式,在数学课堂上,探索代数和超越方程,面对难题时,利用等价原理构建方程组合,深入分析方程组特征,找到最佳解决方案。函数知识丰富,帮助我们理解概念,培养学生的深刻思考和独特思维[5]。

2 函数与方程的应用

2.1函数和方程的相互转换应用。方程 $f(x)=0$ 的解就是函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴交点的坐标,函数 $y=f(x)$ 也可以看作二元方程 $y=f(x)=0$。通过研究方程和函数的相互作用,我们能够更好地理解和应用它们。例如,当遇到某些方程时,我们可以从变量的角度出发,把它们转换成函数,并利用函数的特征来求解;同样,当遇到某些方程时,也可以把它们转换成方程,并使用方程的特征和规律来求解。

例1若关于 x 的方程中 $4^x+a2^x+a+1=0$ 有实数解,求实数 a 的取值范围

探讨这一难题的两条解决途径：一是依循“存在解”的前提,通过合理的等量替换方法去求得其解集范围;二是将现有方程做适当改造,并把它转化为一个数学函数,以致于可以解析出其值域问题。

$$t^2+at+a+1=0$$

解法一令 $2^x=t,t>0$。则方程即为

①当方程(*)的根都在 $(0,+o)$ 上时,可得下式：

$$\begin{cases}\Delta=a^2-4(a+1)\geq 0\\ t_1+t_2=-a>0 \quad 解得\\ t_1t_2=a+1>\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\leq 2-2\sqrt{2}或a\geq 2+2\sqrt{2}\\ a<0\\ a>-1\end{cases}$$

②当方程(*)的一个根在 $(0,+\infty)$ 上,另一个根在 $(-\infty,0)$ 上时,若令 $f(t)=t^2+at+a+1$,则有 $f(0)\leq 0$ 且 $-\dfrac{a}{2}>0$ 即 $a<-1$,由①②可得实数 a 的取值范围是 $a\leq 2-2\sqrt{2}$.

解法二令 $2^x=t(t>0)$,则原方程即为

$$t^2+at+a+1=0,$$

所以

$$a=-\frac{1+t^2}{1+t}=-(t+1)-\frac{2}{t+1}+2\leq-(2\sqrt{2}-2)=2-2\sqrt{2},$$

即 $a\leq 2-2\sqrt{2}$.

例2已知二次函数 $f(x)$ 的次项系数为 a 且不等式 $f(x)-2x$ 的解集为 $(1,3)$,若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等实根,求 $f(x)$ 的解析式

解题思路如果能够将二次不等式的解转换为二次函数,那么这个问题就可以得到解决。

解 $f(x)>-2x$ 的解集为 $(1,3)$,即 $f(x)+2x>0$ 的解集为 $(1,3)$

$f(x)+2x=a(x-1)(x-3)$ 且 $a<0$

$f(x)=a(x-1)(x-3)-2x=ax^2-(2+4a)x+3a$ ①

由 $f(x)+6a=0$ 得 $x^2-(2+4a)x+9a=0$ ②

由题意方程②有两个相等实根
$\Delta=0$ 即

$$5a^2-4a-1=0$$

因为 $a=1$, $a=-1/5$
所以 $a<0$
$a=-1/5$

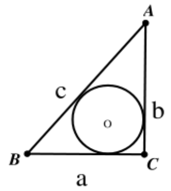
代入①得 $f(x)=-\dfrac{1}{5}x^2-\dfrac{6}{5}x-\dfrac{3}{5}$

2.2函数、方程、不等式相互转换应用。以一元函数为例,函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴的交点的横标就是方程 $f(x)=0$ 的解,函数图像位于 x 轴上方的部分对应的横标的取值就是不等式 $f(x)>0$ 的解它们之间的这种关系使得在解

决实际问题时,可进行适当的转化、归化。

例3半径为1的圆0内切于 $Rt\triangle ABC$,求证： $S_{\triangle ABC}$ 不小于 $3+2\sqrt{2}$

解题思路尽管计算三角形的面积可能存在一些挑战,但是利用一元二次方程的根与系数之间的相互作用,就可以轻而易举地实现计算。



证明如图，设 $\angle C=90°$ ，$Rt\triangle ABC$ 三边长为 $a，b，c$

$$r=\frac{a+b-c}{2}=1,\ a+b=c+2$$

又 $a^2+b^2=c^2$,所以 $(a+b)^2+2ab=c^2$ 即

$$ab=\frac{(c+2)^2-c^2}{2}=2c+2.$$

所以 a , b 为一元二次方程 $x^2-(c+2)x+2c+2=0$ 的两个实数根 $\Delta=c^2-4c-4\ge 0$ ，解得 $c\le 2-2\sqrt{2}$ 或 $c\ge 2+2\sqrt{2}$ 由 $c>0$,得 $c\ge 2+\sqrt{2}$

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=c+1$

$$S_{\triangle ABC}\ge 3+2\sqrt{2}$$

3 中学数学教学中培养学生函数与方程的思想的方式

3.1把数学思想和方法融入教学。教师应利用这个机会,引导学生通过探索数学概念、构建知识、解决问题和归纳规律来培养科学思维和创新意识,促进新旧知识的融合。深入研究等比数列的概念和特性,以及等差数列的公式,有助于学生理解数学并解决实际问题。本文将探讨多种等比数列推理技巧,以期提高教育效果。例如,应用错位相减原则和解方程方法,可以有效解决数学问题

$$S_{n=}a_1+a_1q+a_1q^2+\dots+a_1q^{n-1}=a_1+q(S_{n=}a_1+a_1q+a_1q^2+\dots+a_1q^{n-2})$$

$$=a_1+q(S_n-a_1q^{n-1})$$

所以关于解 S_n 的方程,可得：

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

3.2在小结复习的教学过程中,概括、提炼数学思想方法。在讲授高三的数学复习课时,当遇到“确定满足实数解的方程求解值区间”这样的例题,我们应先从多项式的性质入手,观察到该题目涉及三角函数中的正弦与余弦。在此基础上,恰当地作出一些转换,例如设定代换变量,进而将原问题转化为寻找方程在某区间内解的实数集合,亦即求解特定函数的值域问题。通过应用思维的转换、对函数与方程深入理解的运用,如果教师能够对此进行精确的分析,并注重对学生该类思维方式的培育,这样的题目不仅能够发挥它的最优教学效果,同时也会显著提高学生们解决问题的能力。

3.3在知识运用过程中,不断巩固和深化数学思想方法。掌握和运用数学思维方式对于理解和处理数学问题至关重要,因此,这种技巧不仅是一种基本的技能,也是一种有效的教学策略。为了达到这一目标,我们需要不断努力,积极练习,提高自己的数学水平,并将其运用到日常生活中,从而更好地理解和运用数学知识。在教育中,我们应当努力激发学生的数学思维,让他们有机会去发现、探究、运用,这样,他们就能够更加深刻地领会、运用所学的数学知识,从而提升自身的实践技能。

4 结语

函数与方程被视为中学数学的基础,它们的重要性无可置疑,在教育过程中发挥着至关重要的作用,同时也可以帮助学生发展出独特的思维模式与创新思维。在数理逻辑的宇宙中,函式及等式扮演着至关关键的角色,它们让我们对数学理念有了更透彻的把握,进而在应对数列、二项定理、三角学、平面解析几何、空间几何、概率统计学、微分学以及具体问题求解等多重挑战时更为得心应手。为了让学生能够更加熟练地理解和掌握数学知识,本文将深入探究函数与方程的关联性,并给出一些有效的解决方案,以期让学生能够更加全面、准确地应对数学挑战,从而获得更多的成功。

[参考文献]

[1]秦亚惠.高中生运用函数与方程思想解题的现状分析及培养策略研究[D].兰州:西北师范大学,2022.

[2]王小桃.全国高中数学联赛中函数与方程试题的研究[D].长沙:湖南师范大学,2021.

[3]王若华.函数与方程[J].新世纪智能,2020,(93):31-33.

[4]薛润.认知心理学视角下的高中函数与方程思想方法的教学研究[D].黄石:湖北师范大学,2020.

[5]孙宽程.用函数与方程思想解题[J].数学学习与研究,2020,(01):135-137.

作者简介

朱昱企(2003--),男,汉族,湖北宜昌人,本科,数学。