现代教育论坛
第 2 卷◆第 6 期◆版本 1.0◆2019 年 6 月
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178

高中数学古典概率的解题技巧浅析

李永明　孔紫薇
上饶师范学院 数学与计算机科学学院

DOI:10.32629/mef.v2i6.147

[摘　要] 本文结合贴近生活的例子,着重对古典概率的随机取数问题、摸球问题、球盒问题(分房问题)进行分析,旨在开拓高中生学习的视野,让他们在求解古典概率考题时不会感到无从下手,有助于提高高考概率题的得分率。

[关键词] 古典概率；古典概型；随机取数

Analysis of Classical Probability Problem Solving Skills in High School Mathematics

Li Yongming　Kong Ziwei
School of Mathematics and Computer Science of Shangrao Normal University

[Abstract] This paper combines the examples of close to life, focusing on the analysis of the random probability of classical probability, the ball-feeling problem, and the ball-box problem (sub-room problem), aiming to open up the horizon of high school students' learning and let them solve the classical probability, let them not feel uncomfortable when solving the classical probability test questions, which helps to improve the scoring rate of the college entrance examination probability questions.

[Key words] classical probability; classical probabilistic; random access;

在解答古典概率题型时,要注重概念与解题思路。特别我们知道古典概率计算的技巧性是很强的。从而教师在教授中学古典概率时,让学生要注重对相关问题的理解、注重问题的思考方式。学习好古典概率,掌握计算古典概率的方法,对今后进一步学习好其它知识有很好的帮助。文献[1-6]分析了高考概率必考,以及如何帮助学生掌握概率知识,如何掌握解题技巧教学了阐述。本文从概率的基础知识、技能提高和高考应用三个方面对古典概率进行一个系统的解说,注重解题思想的培养。在今后遇到古典概率时不会无从下手。

1 什么是古典概率

概率论直接来源于赌博,而理解古典概率可以通过掷硬币、掷骰子、摸球等简单得随机试验,其共同的特点有二个：一是试验的样本空间是有限,如掷硬币的结果只有正、反两种情况,掷骰子只有六种情况；二是试验中每个结果的出现是等可能的,如对于均匀的硬币和骰子,在掷硬币时正、反面出现的可能性分别为1/2,在掷骰子时出现1-6点数的可能性分别为1/6。以上随机试验称为古典概型或等可能概型。

古典概率是以随机现象所能发生的事件是有限的、互不相容的,而且每个基本事件发生的可能性相等这一假设为基础。例如,掷一枚均匀的硬币,出现正面与出现反面是两个唯一的基本事件,且是互斥的事件。记出现正面的事件记为H,其概率记为P(H),则P(H)=1/(1+1)=1/2。

一般而言,如果随机试验中可能出现的基本事件总数为n个,事件A中的基本事件数为k,则事件A发生的概率是P(A)=k/n。

古典概率的基本特征有：可知性,无需试验,准确性,有限性,等可能性。

2 求解古典概率的三个基本步骤

2.1判定是否为古典概率问题。首先确定问题所对应的样本空间有有限个样本点；其次验证样本点出现是等可能的。如果这两点满足,那么可断定是一个古典概率问题。

2.2利用计算公式求解事件发生的概率。事件A包含k个样本点,样本空间中总的样本点数为n,则事件A发生的概率为：k/n。

2.3利用排列组合公式和相关知识正确计算k与n的值。

3 求解古典概率的两种基本解法

3.1直接计算法。对比较简单时随机问题,可直接计算k和n。

例如：一个箱子装有编号为1,2,...,10的十个乒乓球,从中任取一个球,求取到的球编号为偶数的概率。

3.2间接计算法。当直接计算k和n存在困难时,可以利用概率的性质和相关定理进行计算。

例1：一批陶瓷茶杯共有50个,其中45个是一等品,5个是二等品,从这批陶瓷茶杯中任取三个,求三个茶杯中有二等品的概率。

4 求解古典概率的三个基本原则

4.1追根溯源,巧用公式。部分题目看似复杂,实乃纸老虎,只有认真审题即可发现完全可用公式求解。

4.2反向思维,正难则逆。对于正面考虑复杂的事件,可考虑其对立事件。

4.3化整为零,重在分化。当所求概率对应的随机事件比

较复杂时,想办法把其分化为若干个简单的事件,再由互不相容事件的一般加法公式,或者由相互独立事件的乘法公式来计算概率。

5 求解古典概率的三种模型分析

5.1随机取数问题。即从几个数字中任取一个,且每个数字被取出的概率相同,先后取出若干个数字,求组成满足要求数字的概率。而根据取出的数字是否放回,又分为随机取数有放回和无放回两种情况。

5.2摸球模型。即从n个球中任意摸出一个,且每个球被摸出的概率相同,先后摸出的球个数k,求摸出的球满足某一条件的概率。根据摸出的球是否放回可分为放回摸球和不放回摸球2种。

(i)放回摸球是指摸球时每次摸出的球,在下一次摸球前要放回袋中,因而每次摸球都是在全体球中进行。

如：学校给某班(50个人)10张演唱会的门票,大家都想要,于是班长就做了50个小纸片,其中10张小纸片上都写上√,40张小纸片上都写上×,放在一个包里。然后让同学们每人随机取出一张,凡取到有√的小纸条就给他一张演唱会的门票。或许有人认为先取者取到√的概率大一些。这种说法对不对？这就是典型的抓阄问题,下面,我们可以把它作为更一般的摸球模型。

例2：一个口袋中装有n个白球,m个黑球,我们不放回地从口袋中随机摸球,求第k次摸到黑球的概率,其中k=1,2,•••,n+m。

5.3球盒模型。有些人将之称为分房问题,即将m个球放进n个盒子中,每个球放进各个盒子的概率相同,求满足一定条件的放法的概率。根据盒子放进球的多少和是否需要对球进行区别,可分为四种类型。

(i)每个盒子至多只能容纳一球,且球不需要区分。

(ii)每个盒子最多只能容纳一个球,且球需要区分。

例3：一个会议室里有n+m个座位,随机的坐n个人。求其中的指定的k个(k<n)个座位都有人的概率。

解：此题实际是如下放球的问题。

n个不同的球被随机放入n+m个盒中,每个只能容纳一个球。求其中指定的k(k<n)个盒子都有球的概率。

(iii)每个盒子能容纳任意多个球,且球不需要分辨

(iv)每个盒子能容纳任意多个球,且球需分辨

例4：1个教室里有()个人,求下列事件的概率：

{没有两个人的生日相同};{它们的生日是同一天};

{恰有m(mn)个人的生日是十月一号}。(一年以365天计)

解：此生日问题实际上是如下的球盒问题：将n个不同编号的球随机放入N(Nn)个盒中,每球以相同的概率被放入盒中,每盒容纳球数不限,求下列事件的概率：

{恰有n个盒中各有一个球};

{n个球都在一个盒中};

{第1个盒中有m(mn)个球}。(N=365)

当N=365,n=60时,,这个概率很小,小于千分之六,这说明60个人的生日都不相同的概率几乎为0。

以上三种模型是根据古典概率的定义对古典概率问题分析整理后得到,在对3种模型问题分析的基础上,同时又总结归纳出各种模型概率的计算方法。在解决实际问题时,通过对具体问题抽象后通常可以对应其中的一种模型,并根据实际需要选用合适方法来进行概率计算。这不仅有利于充分认识古典的基础性地位,从而深刻完整的理解古典概率的意义,而且能够更好的促进人们充分利用所学的知识来解决实际问题。

6 古典概率计算中的两个关键问题

6.1灵活构造样本空间。构造样本空间的关键在于深刻的理解题意。对于同一问题,我们往往可以从不同的角度去理解,从而构造出不同的样本空间,进而产生一题多解。

例5：设一只口袋中有a个黑球,b个白球,每次任意取一个,不放回地取,共取a+b次,求第k次取到黑球的概率。

解：设A={第k次取到黑球}。

方法一：将球编号,也即将球看做是不同的,样本空间为样本点总数为。事件A包含的有利样本点数为,

方法二：只考虑前k次取球,同样给球编号,将球看着是不同的,样本空间为,样本点总数为.事件的有利样本点数为。

方法三：仍对球编号,针对前k次取球,且前k-1次之间对球的号数不区别,第k次区别球号,样本空间为,样本点总数为.事件A的有利样本点数为。

方法四：针对第k次取球建立样本空间,把第k 次摸到的某一个球,其他各次摸到a+b-1个球的所有不同结果归为一个样本点,则样本空间共包含a+b个样本点,而事件A的有利样本点数为a。

评注：由此题不同的解法可见样本点——基本事件的设立不是唯一的。设样本点的基本事件原则是保证基本事件两两互斥,所有样本点的和必为必然事件。在满足基本原则后,只要能将所讨论事件的有利样本点区分开来,并在古典概型中保证基本事件发生等等即可。

(i)中的一个样本点是由的(a+b-k)！个样本点组成,即k次之后取球的各种可能数。

(ii)中的一个样本点是由的(k-1)！个样本点构成,而由中的(k-1)！(a+b-k)！个样本点构成。

(iii)中的一个样本点是由的个样本点构成,而由中的(k-1)！=个样本点构成,由中(a+b-k)！=(a+b-1)！个样本点构成。

6.2紧扣术语理解随机事件。在概率题中经常出现“都”、“不都”、“都不”、“至少”、“之多”、“指定”、“恰有”等术语。它们都和具体的事件联系在一起的,且都有其确切的数学含义与表达形式。因此,弄清它们的含义是正确理解随机事件的关键。这不但是解决古典概率计算问题的一个重要环节,而且对以后其他学科的学习也有深刻作用。

7 高考应用

7.1知识点地位。《概率》是高中数学新教材两次出现的

现代教育论坛
第2卷◆第6期◆版本 1.0◆2019年6月
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178

内容,《必修三》主要介绍两种概型,即古典概型和几何概型;《选修2-2》以研究离散型随机变量为主,两章的内容公共部分就是古典概率。正向思考重点掌握等可能性事件的概率公式、互斥事件的一般概率加法公式、相互独立事件的概率乘法公式、在n次独立重复试验中事件恰好发生k次的概率公式。逆向思考主要借对立事件的概率进行解题。近些年的课程改革的一个重要理念是重视培养学生的创新意识和应用能力,使得概率统计应用题是每年的热点问题。

7.2高考分析。从近几年数学高考试题来看,考查概率与统计知识的绝大多数都有一道大题,在第一题至第四题之间,难度中等,分值12分左右。而选择题或填空题总会有1个概率计算的问题,分值4-6分;并且概率与统计的分值大有升温之势。虽然题目难度不大,但仍有很多同学不易得分,导致总成绩偏低,能否突破此类题目自然成为影响高考分数的一个重要因素。

概率题往往以实际问题为背景,和现实生活紧密相关,连接了教学实际和学生的生活实际,有利于考查概率与统计模块的基本知识和基本方法,有利于考查学生利用概率知识分析和解决问题的能力,有助于考生融入现实社会的大环境中,关心自己身边的概率问题,促使考生在学习和实践中发展概率的应用意识,符合高考的发展要求,从而成为高考的热点

7.3学习建议。(i)注意加强基础学习。纵观近几年高考试题,大多源于教材、处于教材、变于教材。通过深入浅出、举一反三地练习,以不变应万变,在应试场上处变不惊。(ii)注意加强应用学习。在解决概率与统计问题时,要注意理解变量的多变性,深化函数思想方法在实际中的应用,掌握概率知识的实际应用。(iii)注意理解横向学习。概率统计试题已经出现多方面的横向交汇,要会发现并能挖掘知识间的内在联系,如概率统计与函数的交汇、概率统计与方程的交汇、概率统计与不等式的交汇、概率统计与几何的交汇。

[参考文献]

[1]李家洪.概率解题技巧谈[J].高中生学习(试题研究),2017,(10):38-40.

[2]张慧媛.高中数学概率解题技巧及实践应用探究[J].新校园(阅读),2016,(11):98-80.

[3]周华生.古典概率题的解题技巧[J].中学数学杂志:高中版,2005,(11):20-22.

[4]庞春霞.高中数学统计与概率知识的教学探究[J].广西教育(B版中等教育),2017,(9):38-40.

[5]张世林.聚焦2005年高考概率试题的新趋势[J].中学数学研究,2005,(1):19-20.

[6]李鹏祥.古典概率的模型分析与计算方法归纳[J].中国教育技术装备,2009,33:51-55.

[7]孙荣恒.趣味随机问题[M].科学出版社,2004:37.

作者简介：

李永明(1970--),男,江西上饶人,汉族,博士,教授,研究方向：概率统计教学与科研。

基金项目：

本文系江西省高等学校教学改革研究课题：建构主义教学理论在中小学教学实践中的现实困境及对策研究(JXJG-18-16-17)。