Modern Education Forum

现代教育论坛
第 8 卷◆第 18 期◆版本 1.0◆2025 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

用解析几何和集合证明孪生质数猜想成立

王建艺
福建省邵武市 东关小学
DOI:10.32629/mef.v8i18.16991

[摘　要] 本论文利用解析几何和集合的相关知识证明了在[1,5+3n+(3+2n)k]区间(n和k都为自然数),存在2+n+k+△u个孪生质数对,当n和k趋向无穷大时,5+3n+(3+2n)k趋向无穷大,2+n+k+△u也趋向无穷大,即有无穷个孪生质数对。为了方便阐述,这里声明该论文所有的变量都为整数,下文不再具体标注。
[关键词] 孪生质数对；无穷
中图分类号：G40　文献标识码：A

Proving the Conjecture of Twin Prime Numbers with Analytic Geometry and Sets

Jianyi Wang
Dongguan Primary School, Shaowu City

[Abstract] This paper uses the relevant knowledge of analytic geometry and sets to prove that there are 2+n+k+△ u pairs of twin prime numbers in the [1,5+3n+(3+2n) k] interval (where n and k are both natural numbers). When n and k tend to infinity, 5+3n+(3+2n) k tends to infinity, and 2+n+k+△ u also tends to infinity, that is, there are infinite pairs of twin prime numbers. For the convenience of explanation, it is hereby declared that all variables in this paper are integers and will not be specifically annotated in the following text.
[Key words] twin prime pairs; infinite.

引言

孪生质数就是指相差2的质数对,例如3和5,5和7,11和13……这个猜想由希尔伯特在1900年国际数学家大会的报告中的第8个问题正式提出,可描述为:

存在无穷多个质数p,使得p+2是质数。质数对(p,p+2)称为孪生质数,(p,p+2)称为孪生质数对。该猜想一提出,历经100多年都无人攻破,最新的研究成果是华裔数学家张益唐在2013年证明了存在无穷多差小于7000万的质数对。本论文另辟蹊径,用一种新颖的方法来证明孪生质数猜想成立。

1 证明的思路

在2a-1,2a,2a+1(a⩾2)中,

$$2a+1\neq(3+2t_1)(3+2t_2)\quad(t_1\geqslant0,t_2\geqslant0)\qquad①$$

$$2a-1\neq(3+2t_3)(3+2t_4)\quad(t_3\geqslant0,t_4\geqslant0)\qquad②$$

2a+1和2a-1必定是奇数,$(3+2t_1)(3+2t_2)$和$(3+2t_3)(3+2t_4)$必定是奇合数,由

①②可知,符合条件的2a+1和2a-1必定是奇质数。那么只要证明符合条件的a值有无穷个,则孪生质数对便有无穷个。

2 孪生质数猜想的证明

设偶数为2a(a⩾2),则2a的前一个奇数为2a-1,2a的后一个奇数为2a+1。奇合数用$(3+2t_1)(3+2t_2)$ $(t_1\geqslant0,\ t_2\geqslant0)$来表示。根据孪生质数对的定义,我们可得

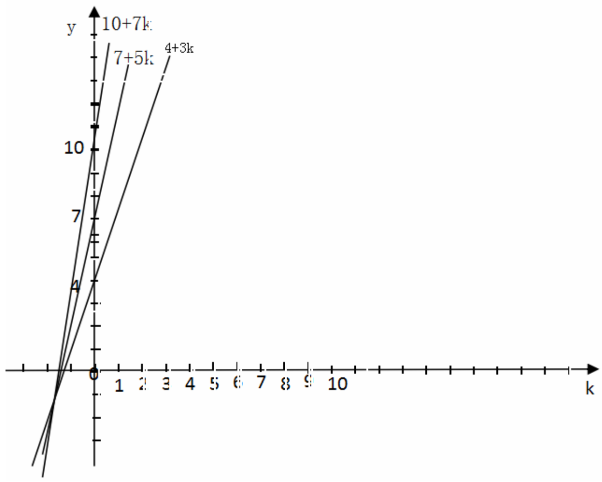
$$\begin{cases}2a+1\neq(3+2t_1)(3+2t_2) & ①\\ 2a-1\neq(3+2t_3)(3+2t_4) & ②\end{cases}$$

由①得：$a\neq4+3(t_1+t_2)+2t_1t_2\ (t_1\geqslant0,\ t_2\geqslant0)$

由②得：$a\neq5+3(t_3+t_4)+2t_3t_4\ (t_3\geqslant0,\ t_4\geqslant0)$

我们先对$a\neq4+3(t_1+t_2)+2t_1t_2\ (t_1\geqslant0,\ t_2\geqslant0)$进行分析。

令$y_1=f(t_1,\ t_2)=4+3(t_1+t_2)+2t_1t_2$



①图为f(n，k)=4+3(n+k)+2nk=4+3n+(3+2n)k，以k为自变量的线性方程组，由于空间有限，只画三条显示。

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 / （中图刊号）：380GL019

则$f(0,0)=4$；

当$t_1=0$，$t_2=k$时，$f(0,k)=4+3(0+k)+0=4+3k$；

当$t_1=1$，$t_2=k$时，$f(1,k)=4+3(1+k)+2k=7+5k$；

当$t_1=2$，$t_2=k$时，$f(2,k)=4+3(2+k)+4k=10+7k$；

……

当$t_1=n$，$t_2=k$时，$f(n,k)=4+3(n+k)+2nk=4+3n+(3+2n)k$；

我们发现，它实际上可以当成无限个以k为自变量的线性方程。如图①：

我们再对$a\neq5+3(t_3+t_4)+2t_3t_4(t_3\geqslant0,t_4\geqslant0)$进行分析。

令$y_2=g(t_3,t_4)=5+3(t_3+t_4)+2t3t_4$

则$g(0,0)=5$；

$g(0,k)=5+3k$；

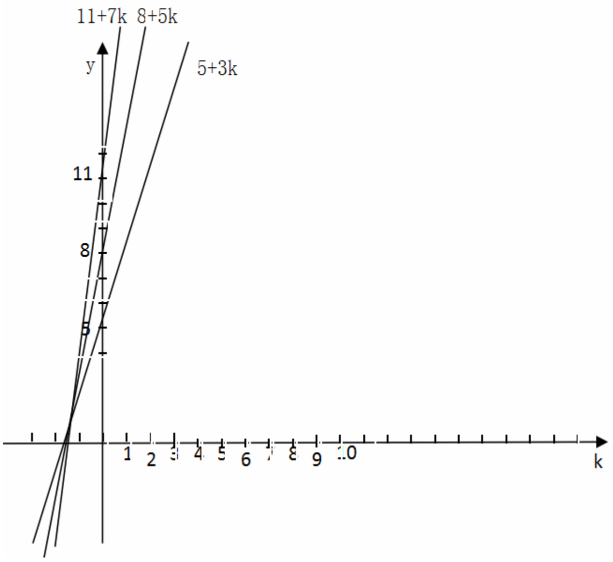
$g(1,k)=5+3(1+k)+2k=8+5k$；

$g(2,k)=5+3(2+k)+4k=11+7k$；

……

$g(n,k)=5+3(n+k)+2nk=5+3n+(3+2n)k$

我们发现，它实际上也可以当成无限个以k为自变量的线性方程，如下图②。



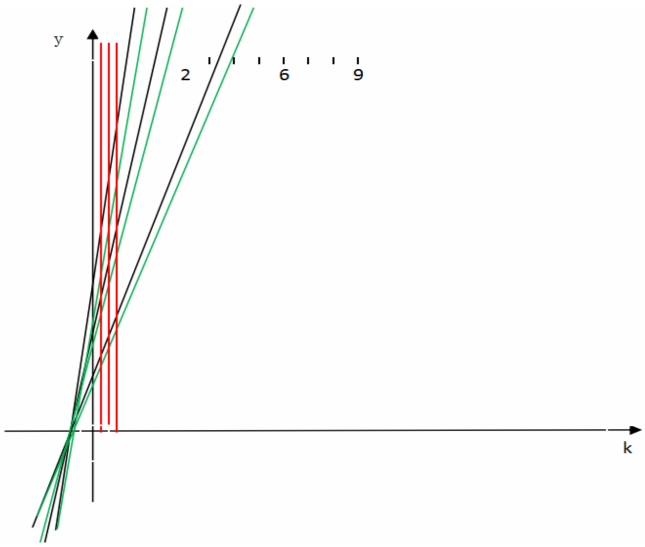
②图为$g(n,k)=5+3(n+k)+2nk=5+3n+(3+2n)k$，以k为自变量的线性方程组，由于空间有限，只画三条显示。

现在，我们把$f(t_1,t_2)$和$g(t_3,t_4)$化成一般形式。

即$f(n,k)=4+3n+(3+2n)k$和$g(n,k)=5+3n+(3+2n)k$，函数图像如下图③：

③图为$f(n,k)=4+3n+(3+2n)k$和$g(n,k)=5+3n+(3+2n)k$，以k为自变量的线性方程组，它是由①图和②图合并在同一坐标系组成，其中绿色斜线代表①图，黑色斜线代表②图，红色竖线为k值。由于空间有限，只画三条绿色斜线，三条黑色斜线，三条红色竖线显示。

其中，绿线线性方程组代表$f(n,k)=4+3n+(3+2n)k$（其中，n=0, 1, 2, 3……），黑线线性方程组代表$g(n,k)=5+3n+(3+2n)k$（其中，n=0, 1, 2, 3……）。



∵当k取同一数值时（$k\geqslant0$），$f(n,k)\neq g(n,k)$；

∴$f(n,k)$和$g(n,k)$在第一象限不可能相交。

为了方便下文的阐明，我把$f(n,k)$和$g(n,k)$组合成一个方程组y12，即

$$y_{12}=\begin{cases}y_1=f(n,k)\\y_2=g(n,k)\end{cases}$$

当k=0时，对$f(n,k)=4+3n+(3+2n)k$来说，取值为4, 7, 10, 13……该线性方程组与纵轴相交有(n+1)个整数点；对$g(n,k)=5+3n+(3+2n)k$来说，取值为5, 8, 11, 14……该线性方程组与纵轴相交同样有(n+1)个整数点。

同理，当k=1时，$f(n,k)=4+3n+(3+2n)k$和$g(n,k)=5+3n+(3+2n)k$与k=1这条竖线相交各有(n+1)个整数点。

……

不管k取多少，$f(n,k)=4+3n+(3+2n)k$和$g(n,k)=5+3n+(3+2n)k$与竖线k的取值相交各有(n+1)个整数点。

如上图，红色竖线代表k=1. k=2, k=3……在这里，由于空间有限，不能把所有的线性方程画出来，所以请读者自行想象。

现在，我们看向纵坐标，在[1, 5+3n+(3+2n)k]区间，我们得算算符合y12的值有多少个。

如果每一个交点所对应的纵坐标的值是互不相同的，那有2(n+1)(k+1)个交点，将会对应有2(n+1)(k+1)个y_{12}的值，但是，会出现多个交点对应同一个y_{12}的值，比如，对于$f(0,k)=4+3k$（k=6）和$f(1,k)=7+5k$（k=3）的值相同，$f(0,k)=4+3k$（k=3）和$g(1,k)=8+5k$（k=1）的值相同，而且这种重复出现的值的个数是无法计算的，但没关系，我们可以用△u表示重复的值的总个数。△u随着n和k的变化而变化。当n和k取值很小时，△u=0。举个例子，当n=0, k=0时，△u=0。所以$\triangle u\geqslant0$。

为了表述清晰，

令$A=\{y_1|y_1=f(n,k)=4+3n+(3+2n)k, nN, kN\}$，

$B=\{y_2|y_2=g(n,k)=5+3n+(3+2n)k, nN, kN\}$，

则集合$A\cup B=\{y_{12}\}$。

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

那么根据集合内元素的互异性,集合A∪B内的元素有2(n+1)(k+1)-△u个。

现在看纵轴,在[1,5+3n+(3+2n)k]区间,共有5+3n+(3+2n)k个数值,而符合y12的数值共有2(n+1)(k+1)-△u个。

∵aA∪B,a≠1,

∴我们可设符合a值的个数为W,则

W=5+3n+(3+2n)k-[2(n+1)(k+1)-△u]-1

=2+n+k+△u

当n→+∞,k→+∞时,

则[1,5+3n+(3+2n)k]→[1,+∞),

W→+∞;

∴孪生质数对有无限个。

∴孪生质数猜想成立。

3 结语

希尔伯特提出的孪生质数猜想可以证明成立,即:存在无穷多个质数对(p,p+2),其中p与p+2都为质数。可用解析几何和集合的知识证明在[1,5+3n+(3+2n)k]区间(n和k都为自然数),存在2+n+k+△u个孪生质数对,其中△u≥0。当n和k趋向无穷大时,5+3n+(3+2n)k趋向无穷大,2+n+k+△u也趋向无穷大,即有无穷个孪生质数对。

[参考文献]

[1][加]R.K.盖伊.数论中未解决的问题[M].北京:科学出版社,2003:29-34.

[2][加]R.K.盖伊.数论中未解决的问题[M].北京:科学出版社,2003:137-140.

[3]闵嗣鹤,严士健.初等数论[M].北京:人民教育出版社,1982:194-198.

作者简介:

王建艺(1989--),男,汉族,福建安溪人,小学教师,现任职于福建省邵武市东关小学。