

# 关于集中力偶作用处弯矩突变方向的讨论

刘小妹 范志毅 李培超

上海工程技术大学机械与汽车工程学院

DOI:10.12238/mef.v3i10.2968

**[摘要]** 绘制梁的内力图,是材料力学中基本且重要的内容。快速又准确地完成剪力图和弯矩图的绘制,是梁弯曲变形章节的学习目标。集中力作用处剪力图会突变,集中力偶作用处弯矩图会突变。在教学过程中,发现集中力偶作用处弯矩图突变方向的判定,有不少学生容易出错,针对这一现象,提出几种分析及快速判断的方法。

**[关键词]** 集中力偶;弯矩图;突变;方向

**中图分类号:** TH **文献标识码:** A

## Discussion on the Direction of Sudden Change of Bending Moment at the Action of Concentrated Couple

Xiaomei Liu, Zhiyi Fan, Peichao Li

School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science

**[Abstract]** Drawing the internal force diagram of a beam is a basic and important content in material mechanics. Fast and accurate drawing of shear force diagram and bending moment diagram is the learning goal of the chapter on beam bending deformation. The shear force diagram will change suddenly when the concentrated force acts, and the bending moment diagram will change suddenly when the concentrated couple acts. During the teaching process, it was found that many students are prone to making mistakes in the judgment of the sudden change direction of the bending moment diagram where the concentrated couple acts. In response to this phenomenon, this article proposes several analysis and quick judgment methods.

**[Key words]** concentrated couple; bending moment diagram; sudden change; direction

众所周知,在材料力学中,横截面剪力图和弯矩图是非常重要的,尤其在正应力计算和强度分析等问题中。通常可以利用分布载荷集度与剪力、弯矩的微分关系绘制剪力图和弯矩图,但是集中力或集中力偶作用处的剪力或弯矩突变是无法利用现有微分关系解决。

剪力突变容易理解,但不容易“推广”到弯矩情形,即:从左向右绘制剪力图,集中力向下,方向同纵坐标负向,是负值,所以向下突变,但如果机械“推广”至弯矩图,则会得出错误的结论。当集中力偶是顺时针时,若按照理论力学符号约定,通常认为是负值,那么就会得出弯矩图就是向下突变。而反之当集中力偶是逆时针时,若按照理论力学符号约定,会得出弯矩图应该向上突变。实际上对于弯矩图并

非如此,恰恰相反。

正确的描述应为:绘制弯矩图和剪力图时,在集中力偶(集中力)作用处,左右两端弯矩(剪力)发生突变,突变量等于该截面上所作用的集中力偶(集中力)的值。至于突变方向判定,应遵循如下准则:从左向右绘制内力图,在集中力作用处,剪力图有突变,突变量等于该集中力的大小,突变与集中力同方向。即当集中力向上时,剪力图向上突变;反之则向下突变。在集中力偶作用处,弯矩图有突变,突变量等于该集中力偶的大小。当集中力偶顺时针时,弯矩图向上突变;反之则向下突变。这正是笔者所编著教材《简明工程力学(第2版)》的阐述。

对于集中力偶处弯矩图突变量的正负判断错误的主要原因,是把理论力学中力

偶矩正负的判定和材料力学中弯矩的正负判定混为一谈,基于此,本文提出采用口诀或截面法来确定集中力或集中力偶作用处,剪力或弯矩突变量的正负判定。

### 1 口诀法原理

剪力和弯矩属于梁的内力,材料力学中内力的正负根据变形来定义的。这不同于列平衡方程时正负号的定义。这一点要和学生强调,也有助于学生对口诀的理解记忆。分析变形时,取梁的微小段,如图1(a)剪力使梁横截面间发生错动,错动方向“左上右下”为正,因此剪力“左上右下”为正。图1(b)弯矩使梁产生“上凹下凸”的变形为正,因此弯矩是“左顺右逆”为正。通常我们从左向右绘制内力图,那么集中力作用向上则剪力图向正方向突变,集中力

偶顺时针则弯矩图向正方向突变。

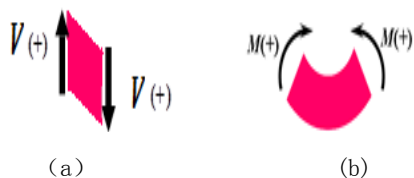


图1 正剪力和正弯矩

### 2 截面法分析

分别在集中力或集中力偶作用处的两侧做截面,取梁的微小段自由体,受力如图2,对两个截面的内力变化进行计算。

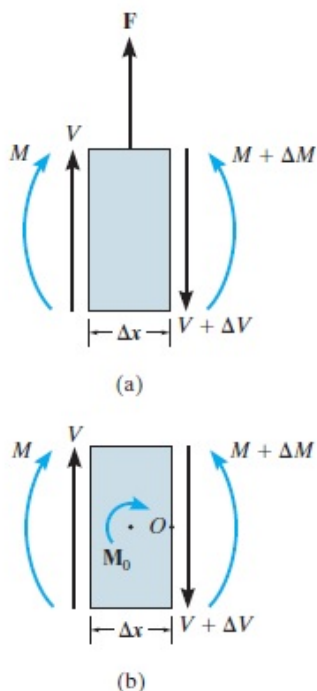


图2 梁的微小段自由体

图2(a)所示,集中力F作用于梁微小段,方向向上,假设左右两侧截面剪力分别为V和V+ΔV,左右两截面剪力突变量ΔV,梁的微小段自由体要满足下面平衡方程,

$$\sum F_y = 0$$

列平衡方程时,按照理论力学的方法,规定力向上为正,则

$$V + F - (V + \Delta V) = 0$$

得:  $\Delta V = F$

那么ΔV与右截面的剪力方向一致,剪力图突变量为正。反之,作用于

梁微小段上的集中力F向下,那么ΔV为负,剪力图突变量为负。

图2(b)所示,当梁微小段作用顺时针集中力偶M0,假设左右两侧截面弯曲分别为M和M+ΔM,那么梁的微小段自由体要满足下面平衡方程,

$$\sum M_0 = 0$$

列力矩平衡方程时,逆时针力矩为正

$$M + \Delta M - M_0 - V\Delta x - M = 0$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$ , 得到

$$\Delta M = M_0$$

图中集中力偶为M0顺时针,ΔM为正,因此弯矩图突变量为正。

因此,采用截面法取梁的微小段为研究,列平衡方程,计算内力的突变量,最终结果验证了截面法与口诀法是完全对应和一致的。

### 3 例题

如图3所示外伸梁AD,A固定铰链支座,C滚动铰链支座,B点作用集中力和集中力偶,集中力大小qa,集中力偶矩大小qa<sup>2</sup>,方向如图示,梁的CD段作用均匀分布力,集度q。绘制梁的剪力图和弯矩图。

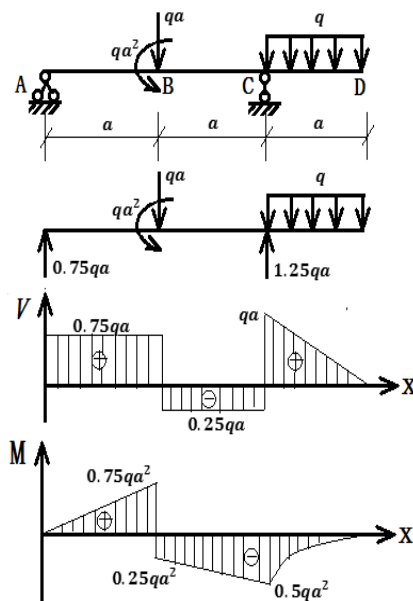


图3 梁的内力图

求出梁的A、C支座反力,然后根据受力情况将梁分成三段,AB、BC、CD,根据微分关系,绘制内力图,注意集中力和集中力偶作用处。

从左向右绘制剪力图,A截面作用有向上的集中力,因此剪力向上突变。AB段内没有力的作用,因此剪力不变,为水平直线。B截面作用向下的集中力,剪力图向下突变。BC段内没有力的作用,因此剪力不变,为水平直线。C截面作用有向上的集中力,因此剪力向上突变。CD段上作用有均匀分布力,因此剪力图为斜直线,斜率同分布力的集度q。

从左向右绘制弯矩图,AB和BC段弯矩图为斜直线,CD段为开口向下的抛物线。B处作用有逆时针的集中力偶,根据弯矩图突变的判定口诀,逆时针集中力偶向下突变,突变值等于集中力偶的大小。

### 4 结束语

快速准确绘制内力图,特别是有集中力和集中力偶作用处,可以采用口诀法。即从左向右绘制内力图,集中力向上,则剪力图向上突变;集中力偶顺时针则弯矩图向上突变。绘制好内力图后,可以采用截面法进行验证。两种方法结合,保证绘图的正确性。学生如果熟练掌握上述方法,不需要大量的练习也能达到很好的学习效果。

### 基金项目:

上海工程技术大学金课建设项目: 工程力学(一)(编号g202001003)。

### [参考文献]

- [1]李培超,范志毅,刘小妹.简明工程力学(第2版)[M].北京:清华大学出版社,2016.
- [2]刘小妹,李培超,潘颖.工程力学参数符号的确定[J].教育教学论坛,2016(30):210-211.
- [3]Hibbeler R C.Mechanics of Materials (8th Edition)[M].Pearson Prentice Hall,2010.

### 作者简介:

刘小妹(1976--),女,汉族,安徽泾县人,讲师,博士,研究方向:机械强度和断裂力学。