第 7 卷◆第 6 期◆版本 1.0◆2024 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

一分数单位写成无穷个分数单位和定理的证明

农荣胜
广西南宁市西乡塘区邓东学校
DOI:10.12238/mef.v7i6.8237

[摘　要] 本文首先介绍《定理 任何一个分数单位均可表示为两个分数单位之和》的特点,最后证明作者本人的定理《任一分数单位写成无穷个分数单位的和》。
[关键词] 分数单位；两分数单位和表达式的个数
中图分类号：G40　文献标识码：A

The characteristics of a theorem about fractional units and Nongrong Sheng's theorem

Rongsheng Nong
Dengdong School, Xixiangtang District, Nanning City, Guangxi

[Abstract] This article first introduces the characteristics of the theorem that any fractional unit can be expressed as the sum of two fractional units, and finally proves the author's own theorem that any fractional unit can be written as an infinite sum of fractional units
[Key words] score unit; The number of fractional units and expressions.

引言

本文作者于2021年9月在《校外教育》杂志上发表了《定理任何一个分数单位均可表示为两个分数单位之和》(见《校外教育》杂志2021年第26期第371页上)。在此,本文介绍本定理的特点以及运用本定理作为引理,证明作者本人的定理《农荣胜定理任何一个分数单位都可以写成无穷多个不同的分数单位的和》。

1 《定理任何一个分数单位均可表示为两个分数单位之和》的特点

若n∈N+, 且n＞1, (b-1)|n＝m, 则 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$。

证明:根据(b-1)|n＝m, 即m＝ $\frac{n}{b-1}$ 故得 $\frac{1}{mb}=\frac{1}{\frac{nb}{b-1}}=\frac{b-1}{nb}$。

故定理右边=$\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}=\frac{1}{nb}+\frac{b-1}{nb}=\frac{1+b-1}{nb}=\frac{b}{nb}=\frac{1}{n}$。

左边＝$\frac{1}{n}$

左边＝右边,定理证完。

下面介绍本定理的特点,本定理有三个特点。

本定理的第一个特点:b取值的最小值是2,b取值的最大值是n+1。因为(b-1)|n=m,所以(b-1)≠0,由此得1≤b-1≤n,即2≤b≤n+1。

本定理的第二个特点：当取n的最小约数(b-1)=1时,即b=2时,则m=n,于是由本定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$,可得 $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$ 。当取n的最大约数(b-1)=n时,即b=n+1时,则m=1,于是,由本定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$,可得 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{b}$

本定理的第三个特点：n有多少个约数,$\frac{1}{n}$就有多少个是两个分数单位之和的表达式。

1.1当n是素数时,那么n只有最小的约数1和最大的约数n两个约数,则 $\frac{1}{n}$ 也只有两个分数单位之和两个表达式

例如,当n=2时,2是素数,那么2只有最小的约数1和最大的约数2两个约数,那么 $\frac{1}{2}$也就只有两分数单位之和的两个表达式。

(1)当取2的最小约数(b-1)=1时,即b=2时,则m=n,于是,由本定理的第二个特点$\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$,可得 $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ 。

(2)当取2的最大约数(b-1)=2时,即b=3时,则m=1,

于是由本定理的第二个特点 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{b}$,可得 $\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$。

又例如,当n=3989时,3989也是素数,那么3989也就只有最小的约数1和最大的约数3989两个约数,那么 $\frac{1}{3989}$ 也就只有两个分数单位之和的两个表达式,

(1)当取3989的最小约数(b-1)=1时,即b=2时,则m=n。于是,由本定理的第二个特点 $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$ 可得 $\frac{1}{3989}=\frac{1}{7989}+\frac{1}{7989}$。

现代教育论坛
第 7 卷◆第 6 期◆版本 1.0◆2024 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

(2)当取3989的最大约数b-1=3989时，即b=3990，则m=1，于是，由本定理的第二特点 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{b}$ 可得 $\frac{1}{3989}=\frac{1}{15916110}+\frac{1}{3990}$。

又例如，当n=4999时，4999也是素数，那么4999也就只有最小的约数1和最大的约数4999两个约数，那么 $\frac{1}{4999}$ 也就只有两个分数单位之和的两个表达式。

(1)当取4999的最小约数(b-1)=1时，即b=2时，则m=n，于是由本定理的第二个特点 $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$ 可得 $\frac{1}{4999}=\frac{1}{9998}+\frac{1}{9998}$

(2)当取4999的最大约数(b-1)=4999时，即b=5000时，则m=1，于是由本定理的第二个特点 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{b}$，可得 $\frac{1}{4999}=\frac{1}{24995000}+\frac{1}{5000}$。

1.2当n是合数时，则n有三个或三个以上的约数。那么 $\frac{1}{n}$ 有三个或四个表达式。

例如，当n=4时，4是合数，4有三个约数1、2和4，那么，$\frac{1}{4}$ 有三个表达式。

(1)当取4的约数(b-1)=1时，即b=2时，则m=n，于是，由本定理的第二个特点 $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$，可得 $\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$。

(2)当取4的约数(b-1)=2时，即b=3时，则m=2，于是，由本定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$ 。

(3)当取4的约数(b-1)=4时，即b=5时，则m=1，于是，由本定理的第二个特点 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{b}$，可得 $\frac{1}{4}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}$。

又例如：当n=27时，27也是合数，27有四个约数1、3、9和27。那么$\frac{1}{27}$有四个表达式。

(1)当取27的约数(b-1)=1时，即b=2时，则m=n，于是，由本定理的第二个特点 $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$，可得 $\frac{1}{27}=\frac{1}{54}+\frac{1}{54}$ 。

(2)当取27的约数(b-1)=3时，即b=4时，则m=9，于是，由本定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{27}=\frac{1}{108}+\frac{1}{36}$ 。

(3)当取27的约数(b-1)=9时，即b=10时，则m=3，于是，由本定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$可得 $\frac{1}{27}=\frac{1}{270}+\frac{1}{30}$ 。

(4)当取27的约数(b-1)=27时，即b=28时，则m=1，于是，由本定理的第二个特点 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{b}$，可得 $\frac{1}{27}=\frac{1}{756}+\frac{1}{28}$ 。

又例如，当n=420时，420也是合数，420有二十二个约数1、2、3、4、5、6、7、10、14、1520、21、28、30、42、60、70、84、105、140、210、和420。那么1/420有两个分数单位之和的二十二个表达式。

(1)当取420的约数(b-1)=1时，即b=2时，则m=n，于是由，定理的第二个特点$\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{840}+\frac{1}{840}$。

(2)当取420的约数(b-1)=2时，即b=3时，则m=210时，于是由定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$ ，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{1260}+\frac{1}{630}$ 。

(3)当取420的约数(b-1)=3时，即b=4时，则m=140，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{1680}+\frac{1}{560}$ 。

(4)当取420的约数(b-1)=4时，即b=5时，则m=105，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{2100}+\frac{1}{525}$ 。

(5)当取420的约数(b-1)=5时，即b=6时，则m=84，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{2520}+\frac{1}{504}$ 。

(6)当取420的约数(b-1)=6时，即b=7时，则m=70，于是由本定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{2940}+\frac{1}{490}$ 。

(7)当取420的约数(b-1)=7时，即b=8时，则m=60，于是由定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$ ，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{3360}+\frac{1}{480}$ 。

(8)当取420的约数(b-1)=10时，即b=11时，则m=42，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{4620}+\frac{1}{462}$ 。

(9)当取420的约数(b-1)=14时，即b=15时，则m=30，于是由，定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$ ，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{6300}+\frac{1}{450}$ 。

(10)当取420的约数(b-1)=15时，即b=16时，则m=28，于是由定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$ ，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{6720}+\frac{1}{448}$ 。

(11)当取420的约数(b-1)=20时，即b=21时，则m=21，于是由定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$ ，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{8870}+\frac{1}{441}$ 。

(12)当取420的约数(b-1)=21时，即b=22时，则m=20，于是由定理的第二个特点 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{b}$ 可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{9240}+\frac{1}{440}$ 。

(13)当取420的约数(b-1)=28时，即b=29时，则m=25，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{12180}+\frac{1}{435}$ 。

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

(14) 当取420的约数(b-1)=30时，即b=31时，则m=14，于是由定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{13020}+\frac{1}{434}$ 。

(15) 当取420的约数(b-1)=42时，即b=43时，则m=10，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{18060}+\frac{1}{430}$ 。

(16) 当取420的约数(b-1)=60时，即b=61时，则m=7，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得$\frac{1}{420}=\frac{1}{25620}+\frac{1}{427}$。

(17) 当取420的约数(b-1)=70时，即b=71时，则m=6，于是由定理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$ 可得$\frac{1}{420}=\frac{1}{29820}+\frac{1}{426}$。

(18) 当取420的约数(b-1)=84时，即b=85时，则m=5，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{35700}+\frac{1}{425}$ 。

(19) 当取420的约数(b-1)=105时，即b=106时，则m=4，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得 $\frac{1}{420}=\frac{1}{44520}+\frac{1}{424}$ 。

(20) 当取420的约数(b-1=140时，即b=141时则m=3，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得$\frac{1}{420}=\frac{1}{59220}+\frac{1}{423}$

(21) 当取420的约数(b-1=210时即b=211时则m=2，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得$\frac{1}{420}=\frac{1}{88620}+\frac{1}{422}$

(22) 当取420的约数(b-1)=420时，即b=421时，则m=1，于是由定理$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$，可得$\frac{1}{420}=\frac{1}{176820}+\frac{1}{421}$

2 定理任何一个分数单位都可以写成无穷多个不同的分数单位的和的证明

引理若n∈N+，且n＞1，(b-1)|n=m，则 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$

本引理在前面第一部分未作为引理时，已给出了证明，在此勿需赘述。

农荣胜定理任何一个分数单位都可以写成无穷多个不同的分数单位的和。

证明：由引理可知，当(b-1)=n时，也就是当取n本身的最大约数(b-1)=n时，即b=n＋1时，则m=1。于是由引理 $\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$ 可得$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{b}$，$\frac{1}{n}$是$\frac{1}{nb}$与$\frac{1}{b}$这两个不同的分数的和。故令A∈N+，A＞1，(t-1)|A=p. 于是由引理，有$\frac{1}{A}=\frac{1}{At}+\frac{1}{pt}$，那么当取A本身的最大约数(t-1)=A时，即t=A＋1时，则p＝1。我们已经知道，在$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{mb}$ 中，当 m = 1 时，有$\frac{1}{n}=\frac{1}{nb}+\frac{1}{b}$，于是在$\frac{1}{A}=\frac{1}{At}+\frac{1}{pt}$中，当p= 1时，同样也有 $\frac{1}{A}=\frac{1}{At}+\frac{1}{t}$ 但又由引理，可知$\frac{1}{At}$和$\frac{1}{t}$这两不同的分数单位，当分别取它们分母At和t本身的最大约数时，$\frac{1}{At}$和$\frac{1}{t}$这两个分数单位，每一个，又再可以写成两个不同的分数单位的和。故令At＝C，(D－1)|c，于是，由引理可知，当取D－1＝C时，则有$\frac{1}{At}=\frac{1}{C}=\frac{1}{CD}+\frac{1}{D}$。同理，令(B－1)|t＝K，那么当K=1时，那么由引理也有$\frac{1}{t}=\frac{1}{Bt}+\frac{1}{B}$+。这样，原本只是$\frac{1}{At}$与两个不同的分数单位的和的$\frac{1}{A}$，即$\frac{1}{A}=\frac{1}{At}+\frac{1}{t}$，现在则变成了四个不同的分数单位$\frac{1}{CD}$、$\frac{1}{D}$、$\frac{1}{Bt}$与$\frac{1}{B}$的和，即$\frac{1}{A}=\frac{1}{CD}+\frac{1}{D}+\frac{1}{Bt}+\frac{1}{B}$ 。然而，对于任何一个分数单位，运用本引理，当取分母的最大的约数时，每一个分数单位，总能得到两个不同的分数单位的和。于是不停施行此法 ，上式$\frac{1}{A}$的右边四个 不同的分数单位的和 ；显然又可写成八个不同的分数单位的和；十六个不同的分数单位的和；三十二个不同的分数单位的和；六十四个不同的分数单位的和；一百二十八个不同的分数单和；……如此永远下去，最终，$\boldsymbol{\frac{1}{A}}$ 必定是无穷多个不同的分数单位的和。

3 结束语

根据《定理任何一个分数单位均可表示为两个分数单位之和》的特点可知，一个分数单位，它的分母有多少个约数，那么它就有多少个两个分数单位之和的表达式。当它的分母是素数时，分母只有最小的约数1和分母本身两个约数，则它有两个表达式。当它的分母是合数时，则分母有三个或三个以上的约数。那么它有三个或四个表达式。农荣胜定理，使我们认识了分数单位的一个深刻性质。使用它，我们可以把任意一个分数单位，写成所需要若干个不同的分数单位的和，换言之，要想把一个分数单位写成多少个不同的分数单位相加的形式，就能写成多少个不同的分数单位相加的形式。

[参考文献]

[1]农荣胜任何一个分数单位均可表示为两个分数单位之和[C].校外教育,2021(26):371.

[2]农荣胜关于真分数可表示为两个分数单位之和的定理教育学 2022(4):223.

[3]农荣胜数学之梦[N.左江日报数字报刊 2022-12-20.

作者简介：

农荣胜(1954--),男,壮族,广西壮族自治区天等县人,中专,小学高级教师,广西南宁市西乡塘区邓东学校。研究方向:数学。