现代教育论坛
Modern Education Forum
第 7 卷◆第 7 期◆版本 1.0◆2024 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

关于用初等代数方法证明”角谷猜想”的证明

贺小康
重庆市奉节县税务局永安税务所
DOI:10.12238/mef.v7i7.8670

[提　要] 该证明首先对所有自然数进行化简,只需证明所有奇数对“猜想”成立即可。一是对奇数进行分类,某一类奇数只需一步即可等于2的幂次方,很容易证明这一类奇数对“猜想”是成立的。同时,我们还能证明：这一类已被证明对“猜想”是成立的奇数,还能证明新的一类或所有奇数对“猜想”都是成立的。按照这个思路一直证明下去,随后我们发现,只有“不能被3整除的奇数”才能证明新的奇数成立,最后,我们用所有“不能被3整除的奇数”对所有奇数进行证明。结论是“角谷猜想”是成立的。
[关键词] 角谷猜想；化简；数学归纳法；不能被3整除的奇数
中图分类号：G633.6　文献标识码：A

Proof of “Collatz Conjecture” by Elementary Algebra Method (Volume I)

Xiaokang He
Yong’an Taxation Office, Fengjie County Taxation Bureau, Chongqing City

[Abstract] The proof first simplifies all natural numbers, and it only needs to prove that all odd numbers are true to the “conjecture”. Firstly, we classify odd numbers. A certain kind of odd numbers can be equal to powers of two in one step, so it is easy to prove that this kind of odd numbers are true to the “conjecture”. At the same time, we can also prove that new odd numbers are true to the “conjecture” as this kind of odd numbers are true to the “conjecture”. Then, in this way of thinking, we find that only “odd numbers cannot be divided by 3” can prove that new odd numbers are true. Finally, we use all “odd numbers cannot be divided by 3” to prove all odd numbers. Our conclusion is that “Collatz Conjecture” is true.
[Key words] Collatz Conjecture; simplify; mathematical induction; odd numbers cannot be divided

“角谷猜想”,英文名为：Collatz Conjecture。

角谷猜想/冰雹猜想或3n+1猜想的来历：

关于“角谷猜想”的来源,主要有两种说法：一、该猜想由日本数学家角谷静夫发现并提出,之后传入欧美国家；二、1976年的一天,《华盛顿邮报》于头版头条报道了一条数学新闻。文中记叙了这样一个故事:70年代中期,美国各所名牌大学校园内,人们都像发疯一般,夜以继日,废寝忘食地玩弄一种数学游戏。这个游戏十分简单：任意写出一个正整数N,并且按照以下的规律进行变换。如果是个奇数,则下一步变成3N+1(“角谷猜想”又称为3n+1猜想)。

如果是个偶数,则下一步变成N/2。

不单单是学生,甚至连教师、研究员、教授与学究都纷纷加入。为什么这种游戏的魅力经久不衰？因为人们发现,无论N是怎样一个数字,最终都无法逃脱回到谷底1。准确地说,是无法逃出落入底部的4-2-1循环,永远也逃不出这样的宿命。(摘自百度百科)。

“角谷猜想”,又称“叙古拉猜想”或“3+1猜想”“冰雹猜想”,见于多种报刊书籍(百度百科等网络媒体均可查),但无论哪种说法,“猜想”的本质内容都完全相同,即：

对于任意自然数n,当n为奇数时则乘以3加上1,当n为偶数时则除以2,反复进行上述两种运算,最后总能得到1。如(以一表示乘以3加上1或除以2的运算过程)：

1—4-2-1；

2-1；

3-10—5—16-8-4—2-1；

4—2-1；

100—50—25-76—38—19-58-29-88-44—22-11-34-17—52-26-13-40—20-10—5—16-8-4-2-1；

下面给出关于“角谷猜想”的证明。为叙述方便,以下简称“猜想”。

1 化简

根据算术基本定理,当m、n均为自然数时,任意偶数必能表示为$(2n-1)\cdot 2^m$。

(1)当n=1时,我们按“猜想”规定的运算规则,对$(2n-1)\cdot 2^m$进行反复除以2(m次)的运算(至不能再整除时为止)后,最后必能得到1(证明略)。同时,即证明了形如2^m的偶数对于猜想是成立的。

推论一:当对某一奇数进行乘以3加上1的运算后,如其结果等于形如2m的偶数,则可以说这个(或一类)奇数对于“猜想”是成立的。

(2)当n≥2时,我们按“猜想”规定的运算规则,对$(2n-1)\cdot 2^m$进行反复除以2的运算(至不能再整除时),最后必得到一个大于或等于3的奇数。

证：$(2n-1)\cdot 2^m\div 2=(2n-1)\cdot 2^{m-1}$

$(2n-1)\cdot 2^{m-1}\div 2=(2n-1)\cdot 2^{m-2}$

$(2n-1)\cdot 2^{m-2}\div 2=(2n-1)\cdot 2^{m-3}$

$=(2n-1)\cdot 2^{m-(m-1)}=(2n-1)$。

$n\geq 2$,∴$2n-1\geq 3$。

证毕。

显然,我们对所有大于或等于3的奇数,仍然需按照“猜想”所规定的运算法则去进行证明(即进行“乘以3加上1”的运算)。这与“猜想”本身对奇数所要求的运算规则完全一致,因此,整个“猜想”即可简化为只需对所有奇数进行证明。

2 对所有的奇数进行证明

(1)根据推论一,我们对下列奇数进行运算并分析：

$1\cdot 3+1=4=2^2$;

$5\cdot 3+1=16=2^4$;

$21\cdot 3+1=64=2^6$;

$85\cdot 3+1=256=2^8$;

从上列奇数的运算我们可以看出：形如

1、5、21、85、……等一类奇数,只需进行一次“乘以3加上1”的运算,其结果就得到了形如2^{2m}的偶数。显然,我们很容易证明这一类奇数对于“猜想”是成立的(证明略)。下面我们证明这一类奇数有无穷多个：

证：设该类奇数为A,

按上述算式表现的规律应有：$A\cdot 3+1=22m$(m为自然数)。如该式成立,则对于任意自然数m,必有与之相对应的A存在。因此,

如证得$(2^{2m}-1)/3=A$成立,则$A\cdot 3+1=2^{2m}$必然成立。

当m=1时,$(2^{2m}-1)/3=1$

令m=k,$(2^{2k}-1)/3=A$成立(即对任意的k,都有与之相对应的A存在)

当k=(k+1)时有：

$[2^{2(k+1)}-1]/3=[2^{2k+2}-1]/3=[2^{2k}\cdot 4-1]/3$

$=[2^{2k}\cdot(3+1)-1]/3=[2^{2k}\cdot 3+2^{2k-1}-1]/3$

$(2^{2k}\cdot 3)$、$(2^{2k}-1)$两部分均能被3整除,因此对任意的k,都有与之相对应的A存在。也即：存在无穷多个形如$(2^{2m}-1)/3$的奇数,对于“猜想”成立,或者说,这一类奇数是已经被证明了的奇数(按“猜想”的运算规则,对形如$(2^{2m}-1)/3$的奇数十分易于反证)。

(2)上面我们证明了形如$(2^{2m}-1)/3$的奇数对于“猜想”是成立的,但显然这一类奇数不能代表所有的奇数。但我们可以这样进行分析和推导:对另一类尚还没有被证明的奇数,在经过乘以3加上1再反复除以2后(至不能整除为止),其结果如等于上述“已经被证明了的奇数”,则我们完全可以证明这一类奇数对于“猜想”也是成立的。

通过验证,显然有：

$(3\cdot 3+1)/2^1=5$;

$(13\cdot 3+1)/2^3=5$;

$(53\cdot 3+1)/2^5=5$;

$(213\cdot 3+1)/2^7=5$;

根据上述验证的情况,我们进行分析并推断:若存在无穷多个如3、13、53、213、……

一类的奇数,令该类奇数为B,m为任意自然

数,则有$(B\cdot 3+1)/2^{2m-1}=5$。

按上述方法,可证得存在无穷多个B,

对于“猜想”成立(证明略)。

又如：

$(113\cdot 3+1)/2^2=85$,

$(453\cdot 3+1)/2^4=85$,

$(1813\cdot 3+1)/2^6=85$,

$(7253\cdot 3+1)/2^8=85$,

同样可证,存在无穷多个如113、453、1813、253、……一类的奇数,对于“猜想”也是成立的。

(3)推导:从上述分析和证明我们看出:3、13、53、213、……一类的奇数和113、453、1813、7253、……一类的奇数,能够通过5、85这两个“已经被证明了的奇数”来被证明它们对于“猜想”是成立的。但反过来我们也可以说,“已经被证明了的奇数”如 5、85 这两个奇数,能证明3、13、53、13、…… 一类的奇数和 113、453、1813、7253、……一类的奇数对于“猜想”成立。也即是说：我们能够利用“已经被证明了的奇数”,来证明另一类新的奇数对于“猜想”也是成立的。而事实上,在利用5、85来证明的新一类奇数中,有下列奇数又能证明新的一类奇数对于“猜想”成立(他们均是十分容易反证的)：

$(17\cdot 3+1)/2^2=13$,

$(69\cdot 3+1)/2^4=13$,

$(277\cdot 3+1)/2^6=13$,

$(1109\cdot 3+1)/2^8=13$,

$(35\cdot 3+1)/2^1=53$,

$(141\cdot 3+1)/2^3=53$,

$(565\cdot 3+1)/2^5=53$,

$(2261\cdot 3+1)/2^7=53$,

$(75\cdot 3+1)/2^1=113$,

$(301\cdot 3+1)/2^3=113$,

第 7 卷◆第 7 期◆版本 1.0◆2024 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-5178 /（中图刊号）：380GL019

$(1205 \cdot 3+1)/2^{5}=113$,

$(4821 \cdot 3+1)/2^{7}=113$,

$(2417 \cdot 3+1)/2^{2}=1813$,

$(9669 \cdot 3+1)/2^{4}=1813$,

$(38677 \cdot 3+1)/2^{6}=1813$,

$(154709 \cdot 3+1)/2^{8}=1813$,

$(4835 \cdot 3+1)/2^{1}=7253$,

$(1109 \cdot 3+1)/2^{3}=7253$,

$(1109 \cdot 3+1)/2^{5}=7253$,

$(1109 \cdot 3+1)/2^{7}=7253$,

显然,从上面的证明看,我们已经找到了证明奇数的特殊方法,但没有找到一般方法。而且在利用“已经被证明了的奇数”来证明另一类新的奇数对于“猜想”是成立的时,我们发现：只有不能被3整除的奇数才能证明新的奇数。

那么,我们可以推断；假如我们能利用所有不能被3整除的奇数去证明所有的奇数,我们就能证明所有奇数对于“猜想”都成立。

下面证明所有不能被3整除的奇数能证明所有的奇数：

首先,我们命不能被3整除的奇数为J,则有。

其次,按照前面的推论我们对J进行乘以3加上1再除以2的运算,则可得算式：命不能被3整除的奇数为：

J= {〖6m+$(-1)^{m}$-1〗÷2}

公式〈一)

公式中m、n均为自然数。现对公式进行计算,可证其J必为奇数。

J= {〖6^{m}+(-1)m-1〗÷2}×3＋1}÷2^{n}

3 结语

因为：对于任一给定的m,总能找到与之相匹配的n,从而得到不同的奇数,那么,给定所有的m,就必能得到所有的奇数。以上每一步都是可逆的,由此证明。“角谷猜想＂是成立的。

[参考文献]

[1]左加亭.探索数字“黑洞”[J].中学生数理化(七年级数学)(北师大版),2007(9):55-56.

[2]飞雁.冰雹猜想[J].智慧数学,2013(11):20-23.

[3]晓兰.冰雹猜想[J].小学生学习指导:中年级,2013(7):80.

作者简介：

贺小康(1963--),男,汉族,重庆奉节人,高中,单位：重庆市奉节县税务局退休,研究方向：数论－角谷猜想。